

Ivan Červeň

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

Teória relativity

Slovenská technická univerzita v Bratislave

2023

Táto kapitola nebola súčasťou prvého vydania súboru Fyzika po
kapitolách z roku 2007

© Ivan Červeň

ISBN 123456789

TEÓRIA RELATIVITY

Autorom teórie relativity bol Albert Einstein. **Špeciálna teória relativity**, ktorú publikoval v roku 1905, priniesla podstatnú zmenu v chápaní času a priestoru, znamenala koniec predstáv o ich absolútnosti. Ukázala, že dĺžky aj časové intervaly závisia od toho, z ktorej vzťažnej sústavy ich pozorujeme. Vyplynulo z nej, že hmotnosť a energia navzájom súvisia, že ak sa zmení energia častice, či fyzikálnej sústavy, zmení sa aj jej hmotnosť. Jej piliermi sú postuláty o rovnocennosti všetkých inerciálnych sústav a nezávislosť rýchlosti svetla od pohybu zdroja či pozorovateľa. Rozhodujúcim podnetom na jej vznik bol nesúlad Maxwellových rovníc s Galileiho transformáciami, ale prispeli aj pokusy, poukazujúce na neexistenciu éteru.

O desať rokov neskôr Einstein publikoval **všeobecnú teóriu relativity**, v ktorej postuloval rovnocennosť všetkých vzťažných sústav, vrátane neinerciálnych. Jej významnou súčasťou je tvrdenie o lokálnej nerozlíšiteľnosti zrýchleného pohybu a gravitačného pôsobenia (napr. pozorovateľ v uzavretej kabíne výťahu ich nedokáže rozlíšiť). Z teórie vyplynulo, že geometria priestoru i plynutie času závisia od rozloženia hmoty v priestore, že prítomnosť hmoty zakrivuje priestor, ako aj svetelné lúče. Jej predpovede – napríklad existencia gravitačných vĺn, či gravitačných šošoviek, boli neskôr potvrdené. Všeobecná teória relativity však nebude predmetom tejto kapitoly..

Špeciálna teória relativity sa zaoberá javmi, ktoré sa pri mechanických dejoch dajú pozorovať až pri tzv. relativistických rýchlostiach, čo sú rýchlosti porovnateľné s rýchlosťou svetla. Klasická mechanika založená na Newtonových zákonoch pri takýchto rýchlostiach už neposkytuje korektné výsledky. Rýchlosti takejto veľkosti nadobúdajú napríklad elektróny urýchlené napätím desiatok kilovoltov, čo sa týka už aj elektrónov v obrazovkách starších televízorov. Elektromagnetické javy sú však so špeciálnou teóriou relativity v úplnej zhode. Vyplýva z nej, že magnetické a elektrické polia sú iba dvoma stránkami jedinej reality. Súlad s teóriou relativity sa prejavuje aj pri Maxwellových rovniciach, ktoré si pri transformáciách medzi inerciálnymi sústavami, zachovávajú svoj tvar.

V prvej podkapitole sú opísané experimenty, ktoré poukázali na neexistenciu éteru a nezávislosť rýchlosti svetla od vzájomného pohybu zdroja a pozorovateľa. Tento výsledok uviedol Einstein ako jeden z postulátov špeciálnej teórie relativity. Druhá podkapitola sa zaoberá Lorentzovými transformáciami a ich dôsledkami na mechanické javy, akými sú kontrakcia dĺžky a dilatácia času. Odvodený je aj transformačný vzťah pre rýchlosť objektov pozorovaných z rôznych inerciálnych sústav, odlišný od vzťahu klasickej mechaniky. Tretia podkapitola je zameraná na hmotnosť, energiu a hybnosť objektov. Zdôvodňuje, prečo sa s rýchlosťou telesa zväčšuje aj jeho hmotnosť. Štvrtá podkapitola je venovaná elektromagnetickým javom, transformáciám príslušných veličín, ako aj invariantnosti elektrického náboja častíc, ktorý na rozdiel od ich hmotnosti sa s rýchlosťou nemení.

OBSAH

TEXTY		
15.1	Pokusy dokazujúce neexistenciu éteru	
15.1.1	Michelsonov - Morleyov pokus	5
15.1.2	Pokus s atómovými hodinami	7
15.1.3	Einsteinove postuláty	9
15.2	Lorentzove transformácie a ich dôsledky	
15.2.1	Ododenie Lorentzových transformácií	12
15.2.2	Kontrakcia dĺžok a dilatácia času	15
15.2.3	Transformácia rýchlosti	20
15.2.4	Časopriestor, štvorvektory	22
15.3	Relativistická mechanika	
15.3.1	Hmotnosť v teórii relativity	25
15.3.2	Hmotnosť a energia	27
15.3.3	Energia a hybnosť	30
15.4	Relativistická elektrodynamika	
15.4.1	Transformácia Maxwellových rovníc	32
15.4.2	Súvislosť Coulombovho a Biot-Savartovho zákona	34
15.4.3	Invariantnosť elektrického náboja	37
DODATKY		
D1	Grafické znázornenie dvoch inerciálnych sústav	40
D2	Transformácia zložky- y rýchlosti	41
D3	Poznámka k transformácii Maxwellových rovníc	41
D4	Comptonov jav	42
SÚHRN VZŤAHOV		44
SLOVNÍK		46
ÚLOHY		50
PRAMENE		53

Potrebné vedomosti

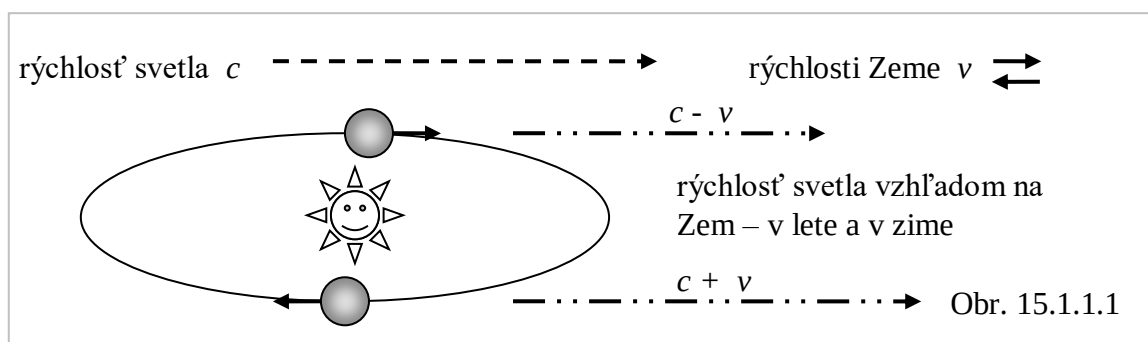
Treba poznať pojmy zavedené už v mechanike – hybnosť, práca, energia, a pre časť o relativistickej elektrodynamike aj Maxwellove rovnice, Coulombov a Biotov-Savartov zákon.

15.1 Pokusy dokazujúce neexistenciu éteru

V poslednej tretine XIX. storočia, po Maxwellovej predpovedi (1865) a Hertzovom experimentálnom dôkaze existencie elektromagnetického vlnenia (1888), začalo sa uvažovať o prostredí, ktorým sa toto vlnenie šíri (akým je napr. vzduch pri šírení zvuku). Predpokladané prostredie dostalo názov *éter*, ale problémy boli s experimentálnym dôkazom jeho existencie. Predpokladalo sa, že éter vyplňa celý vesmírny priestor, že je nehybný a že planéty a hviezdy sa v ňom pohybujú. Pohyb vzhľadom na éter – ak by sa ho podarilo zistiť – by bol absolútnym pohybom, v súlade s Newtonovými predstavami o absolútnom priestore a čase. Z viacerých pokusov, ktoré mali tento absolútny pohyb zistiť, si pozornosť zaslúži najmä pokus Michelsonov, a z neskoršieho obdobia pokus s atómovými hodinami.

15.1.1 Michelsonov - Morleyov pokus

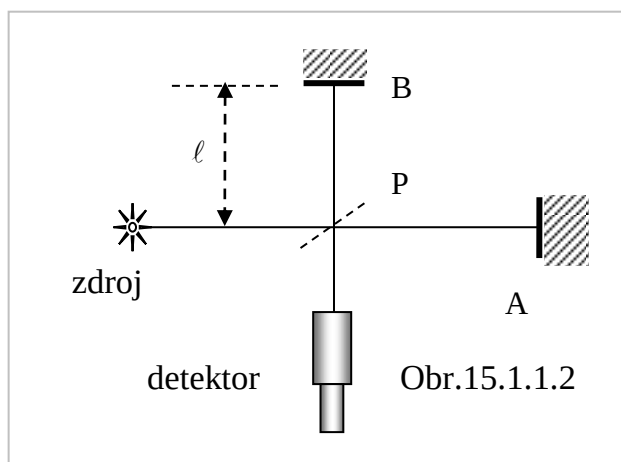
Pokus vychádzal z predpokladu, že éter zaplňa celý Vesmír a že svetlo sa vzhľadom na éter pohybuje vo všetkých smeroch vždy rovnakou rýchlosťou, podobne ako vlny po hladine pokojného jazera. Pohyb Zeme okolo Slnka sa vtedy dá interpretovať ako pohyb vzhľadom na éter, pravda za predpokladu, že Slnko sa vzhľadom na éter nepohybuje. To by znamenalo, že rýchlosť svetla vzhľadom na Zem by závisela od veľkosti a smeru jej rýchlosti. V lete by sme namerali inú rýchlosť



svetla prichádzajúceho napríklad od hviezdy Regulus (leží v rovine ekliptiky), ako v zime. Keď sa Zem pohybuje v ústrety prichádzajúcemu svetelnému lúč, mali by sme mu namerať vyššiu rýchlosť, ako v prípade pohybu Zeme opačným smerom. A ešte inakšiu veľkosť rýchlosti by sme namerali, keby sa svetelný lúč pohyboval kolmo na smer pohybu Zeme.

V roku 1887 A. Michelson navrhol a skonštruoval optické zariadenie – interferometer – ktorý neskôr spolu s E. Morleyom zdokonalili a pokúsili sa porovnať

rýchlosti dvoch svetelných lúčov, pohybujúcich sa v navzájom kolmých smeroch. Preto ich interferometer mal dve na seba kolmé ramená (obr.15.1.1.2).

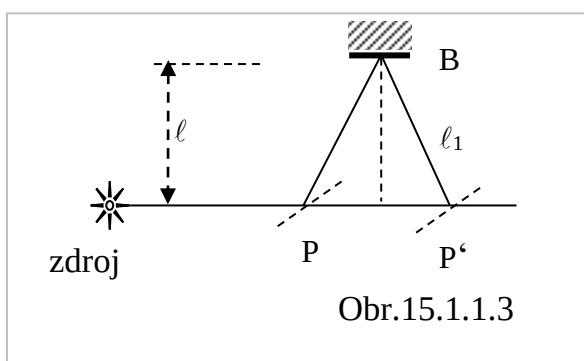


Úzky svetelný lúč vychádzajúci zo zdroja dopadá na polopriepustné zrkadlo P, kde sa delí na dve približne rovnako intenzívne časti. Jedna časť pokračuje priamo k zrkadlu A, odrazená k zrkadlu B, na nich sa lúče odrazia a vracajú k polopriepustnému zrkadlu P. Tam sa opäť každý z lúčov rozdelí – časť sa vracia smerom k zdroju, časť smeruje k detektoru, zvyčajne ďalekohľadu, ktorým bola sledovaná interferencia lúčov.

Výsledok interferencie závisí od rozdielu dĺžok, ktorými musia dva lúče prejsť. Tento rozdiel závisí od dĺžok ramien interferometra – od vzdialeností zrkadiel A resp. B od polopriepustného zrkadla P. Predpokladajme, že ramená majú rovnakú dĺžku ℓ .

Keby sa Zem vzhľadom na éter nepohybovala, svetlo by na prelet od zrkadla P k zrkadlám A, resp. B a nazad, potrebovalo časový interval $\Delta t_0 = 2\ell/c$. Keď sa však pohybuje, tak tieto časové intervaly by sa mali zmeniť. Pri ramene rovnobežnom s vektorom rýchlosti Zeme je rýchlosť svetla v jednom smere $c + v$, v opačnom smere $c - v$. Pre časový interval $\Delta t_{||}$ potrebný na prelet ramena tam a späť tak dostaneme

$$\Delta t_{||} = \frac{2\ell}{c-v} + \frac{2\ell}{c+v} = 2\ell \frac{c}{c^2 - v^2} = \frac{2\ell}{c} \frac{1}{1 - (v^2/c^2)} \quad (15.1.1.1)$$



Svetelný lúč letiaci v „kolmom“ smere sa musí pohybovať mierne šikmo, lebo pokým od zrkadla P prejde k zrkadlu B, toto sa rýchlosťou v o kúsok posunie. Dvakrát musí preletieť dráhu ℓ_1 , pokým sa vráti k zrkadlu P, na čo potrebuje časový interval $\Delta t_{\perp}$. Na základe obrázku 15.1.1.3 platia vzťahy

$$(\ell_1)^2 = \ell^2 + \left(v \frac{\Delta t_{\perp}}{2}\right)^2 \quad \text{a} \quad \ell_1 = c \frac{\Delta t_{\perp}}{2}, \quad \text{čiže} \quad \frac{c^2}{4} (\Delta t_{\perp})^2 = \ell^2 + \frac{v^2}{4} (\Delta t_{\perp})^2,$$

odkiaľ úpravou získame

$$(c^2 - v^2)(\Delta t_{\perp})^2 = 4\ell^2 \quad \Rightarrow \quad (\Delta t_{\perp})^2 = \frac{4\ell^2}{(c^2 - v^2)},$$

a konečný vzťah:

$$\Delta t_{\perp} = \frac{2\ell}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (15.1.1.2)$$

Za predpokladu, že Zem sa vzhľadom na éter pohybuje rýchlosťou v a že svetlo sa vzhľadom na éter pohybuje stálou rýchlosťou c , svetlo na prelet cez navzájom kolmé ramená interferometra potrebuje rôzne časové intervaly. Pre ich rozdiel by platilo:

$$\Delta t = \Delta t_{\parallel} - \Delta t_{\perp} = \frac{2\ell}{c} \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \cong \frac{2\ell}{c} \left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \right] = \frac{\ell}{c} \frac{v^2}{c^2} \quad (15.1.1.3)$$

Pri dĺžke ramien interferometra $\ell = 10 \text{ m}$, rýchlosti svetla $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ a rýchlosti Zeme $v = 3 \times 10^4 \text{ m/s}$, pre rozdiel časových intervalov dostaneme údaj

$$\Delta t = (1/3) \times 10^{-15} \text{ s} .$$

Za tento krátky časový interval svetlo preletí vzdialenosť $c \cdot \Delta t = 10^{-7} \text{ m}$, čo je jedna pätina vlnovej dĺžky zeleného svetla. To znamená, že v pozorovacom ďalekohľade by sme mali vnímať interferenciu dvoch svetelných vĺn, ktoré sú dráhovo posunuté o tento zlomok vlnovej dĺžky. Po šiestich hodinách si v dôsledku rotácie Zeme ramená vymenia úlohy (pôvodne rovnobežné rameno bude teraz kolmé na smer pohybu Zeme), takže v ďalekohľade by sme mali sledovať postupné zmeny interferenčného obrazu. Napriek očakávaniu sa interferenčný obraz pri Michelsonovom a Morleyovom experimente vôbec nemenil, ani počas dňa, ani v priebehu roka.

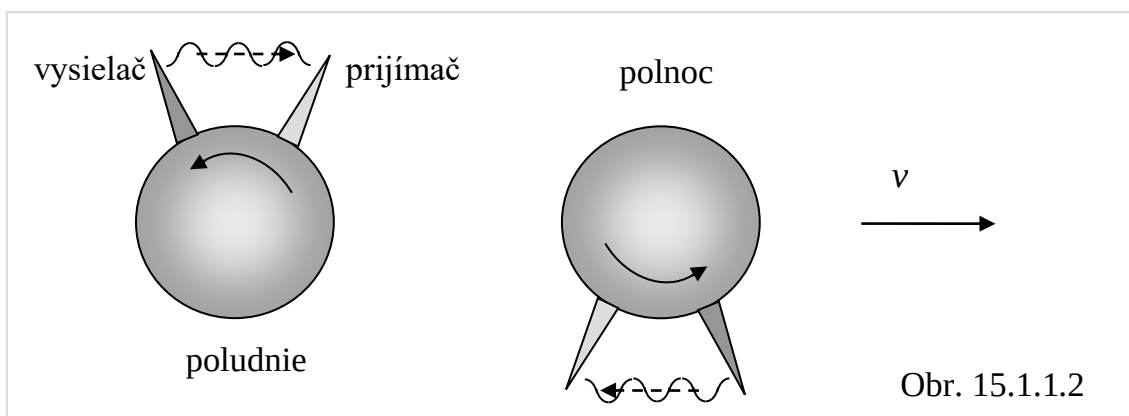
Záporný výsledok experimentu sa dá vysvetliť napríklad tak, že éter sa pohybuje spolu so Zemou, alebo, že rýchlosť svetla je vo všetkých smeroch rovnaká, neovplyvnená pohybom Zeme. Pohyb éteru spolu so Zemou (hovorelo sa o dokonalom strhávaní éteru Zemou) je však nepravdepodobný, lebo to isté by sa dialo aj v prípade iných planét, alebo dokonca pohybujúcich telies. Preto je nezávislosť rýchlosti svetla od pohybu zdroja či pozorovateľa tým správnym záverom vyplývajúcim z výsledku Michelsonovho a Morleyovho experimentu.

15.1.2 Pokus s atómovými hodinami

Ide o experiment uskutočnený mnoho rokov po vzniku teórie relativity. V čase jej vzniku ešte neboli k dispozícii také presné metódy merania času, aké poskytujú atómové hodiny. Tento experiment má jednoduchú analógiu v šírení zvuku vzduchom, alebo vĺn po pokojnej hladine jazera. Keď sa zdroj zvuku a pozorovateľ vzhľadom na vzduch nepohybujú, a medzi nimi je vzdialenosť ℓ , vyslaný zvukový signál doletí k pozorovateľovi za časový interval $\Delta t = \ell/c$, kde c je rýchlosť zvuku vo vzduchu. Ak sa zdroj aj pozorovateľ pohybujú rovnakou rýchlosťou v v smere šírenia zvuku,

potom pozorovateľ pred zvukovým signálom uteká, takže signál musí prekonať väčšiu vzdialenosť než ℓ , pokým príde až k pozorovateľovi. To znamená, že mu to trvá dlhšie. Ak sa zdroj aj pozorovateľ pohybujú opačným smerom, potom zvukový signál príde k pozorovateľovi za kratší časový interval.

Podobná situácia by nastala, keby sme sledovali šírenie elektromagnetickej vlny medzi vysielačom a prijímačom, umiestnenými na povrchu Zeme (napr. na rovníku). Pravda, za predpokladu, že elektromagnetické vlny sa šíria nehybným éterom. Predpokladajme že Zem sa vzhľadom na éter pohybuje rýchlosťou v . Ak by sa vlna od vysielača k prijímaču o polnoci šírila súhlasne so smerom pohybu Zeme, trvalo by jej to dlhšie ako na poludnie (obr. 15.1.2.1). Prijímač by vtedy pred vlnou vyslanou vysielačom unikál, na rozdiel od poludnia, kedy by jej šiel v ústrety. Rozdiel medzi časovými intervalmi, ktoré by vlna potrebovala na poludnie a v noci dokážeme vypočítať a v súčasnej dobe by sa pomocou atómových hodín dali aj zmerať.



Najprv vypočítame príslušné časové intervaly. Nech sa elektromagnetická vlna pohybuje vzhľadom na éter rýchlosťou c , a Zem vzhľadom na éter rýchlosťou v . Vzdialenosť medzi vysielačom a prijímačom nech je d . Ak prijímač pred vlnou uteká, vlna potrebuje na prelet časový interval $\Delta t_{deň}$, keď ide vlna oproti, časový interval Δt_{noc} , pre ktoré platia vzťahy:

$$\Delta t_{deň} = \frac{d}{c - v}, \quad \Delta t_{noc} = \frac{d}{c + v} \quad (15.1.2.1)$$

Pre rozdiel týchto časových intervalov dostaneme:

$$\Delta t = \frac{d}{c - v} - \frac{d}{c + v} = \frac{2dv}{c^2 - v^2}. \quad (15.1.2.2)$$

Keď dosadíme hodnoty $d = 100 \text{ km}$, $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, $v = 3 \times 10^4 \text{ m/s}$, pre rozdiel časových intervalov dostaneme približne $\Delta t = 3 \times 10^{-8} \text{ s}$, čo je v súčasnosti pohodlne merateľná hodnota. Veď sekunda sa v súčasnosti reprodukuje s relatívnou neurčitou $1 \times 10^{-13} \text{ s}$. Experimenty ukázali, že časové intervaly Δt_{noc} a $\Delta t_{deň}$ boli s vysokou presnosťou namerané ako rovnaké.

Experiment s atómovými hodinami s oveľa vyššou presnosťou potvrdil výsledok Michelsonovho – Morleyovho pokusu. Nie je teda možné zistiť pohyb Zeme vzhľadom na éter, resp. nameraná rýchlosť svetla nezávisí od pohybu pozorovateľa vzhľadom na zdroj.

Spomenieme ešte pokus, ktorý vykonali F. Trouton a H. Noble v rokoch 1902 až 1903. Pokúšali sa určiť moment sily pôsobiaci na dvojicu nábojov s opačnými znamienkami (ako dipól), ktoré pri pohybe vzhľadom na éter mali na seba pôsobiť nielen elektrostaticky, ale aj magneticky. Pritom mal vzniknúť moment sily, zabezpečujúci rozdielne polohy dipólu vo dne a v noci. Pokus realizovali pomocou nabitého kondenzátora zaveseného na jemnom vlákne, aj ten však viedol k rovnakému výsledku, ako dva už spomenuté pokusy.

15.1.3 Einsteinove postuláty

Pokusy snažiace sa objaviť éter ukázali, že nech sa akokoľvek pohybujeme, rýchlosť svetla, ktorú nameriame, je vždy rovnaká (rozumie sa rýchlosť vo vákuu). Ako keby sme sa vzhľadom na éter nepohybovali, resp. ako keby hypotetický éter bol úplne strhávaný pohybom Zeme. Ale planéty, aj rôzne telesá na Zemi, sa pohybujú rôznymi rýchlosťami, takže absolútne strhávanie éteru len našou Zemou je nepravdepodobné. Preto môžeme konštatovať, že nejestvuje absolútne stojace médium, ktorým sa šíria elektromagnetické vlny.

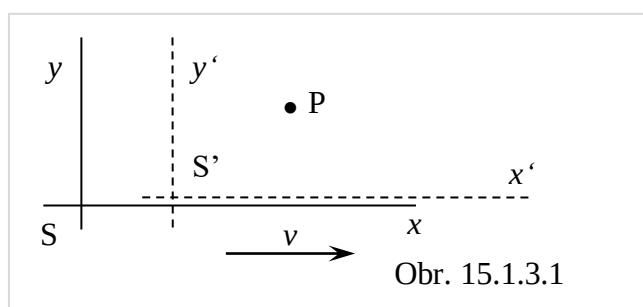
Berúc do úvahy výsledky experimentov Einstein sformuloval dva postuláty:

- I. Všetky inerciálne vzťažné sústavy sú pre opis fyzikálnych dejov rovnocenné, žiadna z nich nemôže byť považovaná za preferovanú (absolútnu).
- II. Rýchlosť svetla (vo vákuu) nezávisí od pohybu, ani voľby vzťažnej sústavy, vzhľadom na ktorú sa meria. Vo všetkých vzťažných sústavách je rovnaká.

Prvý postulát sa označuje aj ako **špeciálny princíp relativity** (niekedy aj ako Einsteinov). Môže sa doplniť formuláciou, že fyzikálne zákony (nielen pre mechanické, ale aj pre ostatné javy) musia mať rovnaký tvar vo všetkých inerciálnych vzťažných sústavách.

Einsteinove postuláty vyplynuli z logického posúdenia experimentov. Vyjadrujú prekvapujúcu skutočnosť, že keby sme sa akokoľvek rýchlo pohybovali v ústrety svetelnému lúču, vždy by sme mu namerali rovnakú rýchlosť. To je v rozpore s bežným princípom skladania rýchlostí, podľa ktorého sa rýchlosti sčítavajú lineárne. Rýchlosť cestujúceho pohybujúceho sa v električke, sa vzhľadom na koľajnice rovná súčtu rýchlosti električky a rýchlosti cestujúceho vzhľadom na električku. Takéto klasické skladanie rýchlostí opisujú Galileiho transformačné vzťahy medzi

súradnicami dvoch vzťahných sústav, ktoré sa navzájom pohybujú. Ich platnosť sme doteraz intuitívne predpokladali, je však vhodné uviesť ich matematickú formu.



Na obrázku sú znázornené dve súradnicové sústavy S a S' , ktoré majú rovnobežné súradnicové osi, pričom sústava S' sa vzhľadom na sústavu S pohybuje rýchlosťou v v kladnom smere osi x . Predpokladajme, že bod P sa v sústave S nepohybuje, a má súradnice $P(x, y)$. Jeho súradnica y' je rovnaká ako súradnica y ($y' = y$), čo môžeme napísať aj pre tretiu súradnicu: $z' = z$. Ale súradnica x' sa v sústave S' s časom mení podľa vzťahu

$$x' = x - vt.$$

Tieto vzťahy spolu tvoria špeciálny prípad **Galileiho transformácií**:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (15.1.3.1)$$

Ak by sa bod P pohyboval rovnobežne s osou x rýchlosťou u , jeho rýchlosť u' vzhľadom na sústavu S' , vypočítame deriváciou transformačného vzťahu medzi súradnicami x a x' :

$$u' = \frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt}(x - vt) = \frac{dx}{dt} - v = u - v, \quad (15.1.3.2)$$

čo je Galileiho transformačný vzťah pre rýchlosť. Podľa tohto vzťahu by pozorovaná rýchlosť svetla závisela od rýchlosti pohybu pozorovateľa. Tento vzťah bol intuitívne použitý pri posudzovaní Michelsonovho – Morleyovho pokusu, aj pokusu s atómovými hodinami. Ako ukázali tieto experimenty, viedlo to k nesprávnemu odhadu výsledkov. Správne výsledky však poskytujú transformácie, ktoré sformuloval H. A. Lorentz v snahe nájsť transformácie, ktoré zachovávajú tvar Maxwellových rovníc. Sú odvodené v nasledujúcej časti tohto textu.

K výpočtu rýchlosti v čiarkovanej sústave treba ešte dodať významnú poznámku – predpokladali sme, že čas v oboch sústavách plynie rovnako, teda že aj časové intervaly dt' a dt sú rovnaké. Takýto predpoklad je v súlade s Newtonovou predstavou absolútneho priestoru a času. Ten však z hľadiska teórie relativity nie je správny.

Treba ďalej uviesť, že Newtonova rovnica $F = ma$ nemení svoj tvar pri transformácii do inej inerciálnej sústavy, ak sa použijú Galileiho transformačné vzťahy. Keďže vzájomná rýchlosť v dvoch inerciálnych sústav sa s časom nemení, deriváciou

vzťahu (15.1.3.2) podľa času zistíme, že zrýchlenie (častice, telesa) je v oboch sústavách rovnaké:

$$a' = \frac{du'}{dt} = \frac{du}{dt} + 0 = a. \quad (15.1.3.3)$$

A teda aj sily sú v týchto sústavách rovnaké ($F = F' = ma$), lebo hmotnosť m sa podľa klasickej fyziky s narastajúcou rýchlosťou nemení. Preto sú pohybové zákony týkajúce sa mechanických dejov vo všetkých takýchto vzťahných sústavách rovnaké. Táto skutočnosť sa označuje ako **mechanický**, alebo **Galileiho princíp relativity**.

Inak je to pri Maxwellových rovniciach opisujúcich elektromagnetické deje, vrátane šírenia svetla – tie nie sú v súlade s Galileiho transformáciami. V súlade sú však s Lorentzovými transformačnými vzťahmi, voči ktorým naopak, nie sú invariantné Newtonove pohybové rovnice. Lorentzovým transformáciám je venovaná nasledujúca podkapitola.

Kontrolné otázky

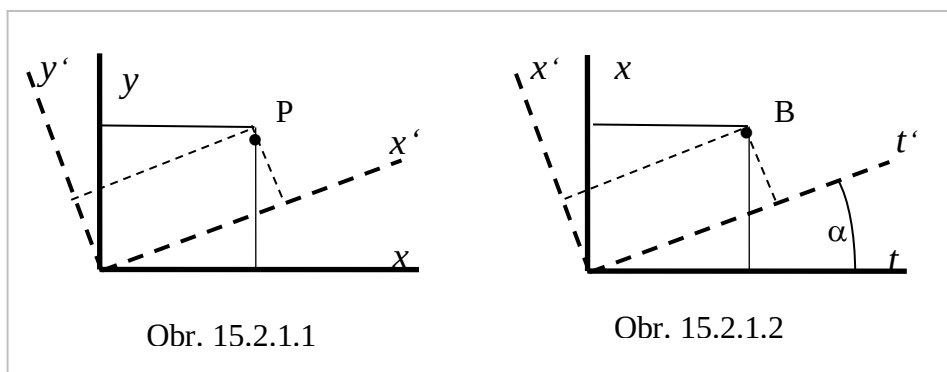
1. Čo bolo cieľom Michelsonovho pokusu a aký bol jeho výsledok?
2. Ktorý pohyb Zeme vzhľadom na éter mohol mať väčší vplyv – denný či ročný?
3. V čom je nesúlad výsledkov Michelsonovho pokusu s Galileiho transformáciami?
4. Ako Einstein vyriešil negatívny výsledok Michelsonovho pokusu?
5. Sformulujte vlastnými slovami prvý aj druhý Einsteinov postulát.
6. Čo hovorí špeciálny princíp relativity, čím sa líši od mechanického princípu?
7. Ktorá časť fyziky je v súlade s Galileiho transformáciami?
8. Môže sa súradnicová sústava viazaná na zemský povrch považovať za inerciálnu?

15.2 Lorentzove transformácie a ich dôsledky

Experimenty vykonané ešte koncom 19. storočia ukázali, že Galileiho transformácie vedú k nesprávnym predpovediam, keď ide o elektromagnetické javy. Preto sa hľadali iné transformačné vzťahy, ktoré by ich korektne opisovali. V tejto podkapitole sú odvodené Lorentzove transformácie a posúdené dôsledky, ktoré z nich vyplývajú.

15.2.1 Odvodenie Lorentzových transformácií

Lorentzove transformácie sa od Galileiho líšia tým, že pri prechode do inej inerciálnej sústavy sa menia nielen priestorové súradnice objektov, ale aj časové údaje udalostí. Časový údaj konkrétnej udalosti nameraný v jednej sústave, sa nemusí zhodovať s údajmi nameranými v iných sústavách. Treba však hneď uviesť, že z rovnocennosti inerciálnych sústav vyplýva (prvý Einsteinov postulát), že vo všetkých inerciálnych sústavách plynie ich tzv. *vlastný čas* rovnako. Etalóny sekundy aj metra sú vo všetkých inerciálnych sústavách rovnaké, len ich veľkosti sa inak javia zo sústav, vzhľadom na ktoré sa tieto etalóny pohybujú. Transformujú (menia) sa údaje o polohe a časovom okamihu „bodovej udalosti“ pri prechode do inej inerciálnej sústavy.



Zmena polohových súradníc je súčasťou aj Galileiho transformačných vzťahov, zmena časovej „súradnice“, je však špecialitou Lorentzových transformácií. Tieto transformácie dokážeme odvodiť na základe analógie s dvoma navzájom pootočenými ortogonálnymi karteziánskymi sústavami so spoločným začiatkom (obr. 15.2.1.1). Bod P má v sústave S súradnice (x, y) , v sústave S' súradnice (x', y') , pričom medzi súradnicami platia lineárne transformačné vzťahy

$$x' = a_{11}x + a_{12}y, \quad y' = a_{21}x + a_{22}y,$$

resp.

$$x = a'_{11}x' + a'_{12}y', \quad y = a'_{21}x' + a'_{22}y'$$

(15.2.1.1)

Ak jednu z priestorových súradnicových osí nahradíme časovou osou, zistíme, že vlastne ide o znázornenie dvoch inerciálnych sústav, ktoré sa navzájom pohybujú, pričom uhol pootočenia α súvisí s ich vzájomnou rýchlosťou v prostredníctvom vzťahu $\tan \alpha = v$ ($\rightarrow$ dodatok D1). Predstavme si dve inerciálne sústavy, s osami x a x' ležiacimi v jednej priamke (ako na obrázku 15.1.3.1 v predchádzajúcom článku). Nech v čase $t_1 = t'_1 = 0$ sú ich začiatky totožné a nech odtiaľ (t.j. z polohy $x_1 = x'_1 = 0$) v tomto okamihu vyštartuje v smere osi x pretekár. Ten v čase t_2 dobehne do bodu B, ktorý má súradnicu x_2 . Jeho rýchlosť v sústave S vypočítame ako podiel $u = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$, ale v sústave S' , ktorá sa vzhľadom na sústavu S pohybuje rýchlosťou v , sa jeho rýchlosť vypočíta podľa vzťahu $u' = (x'_2 - x'_1)/(t'_2 - t'_1)$, čo aj podľa obrázku 15.2.1.2 poskytuje inú hodnotu.

V analógii so vzťahmi (15.2.1.1) napíšeme transformačné vzťahy vychádzajúce z obr. 15.2.1.2, ale súradnicu y nahradíme časovou súradnicou, (pri trojrozmernom priestore považujeme časovú súradnicu za štvrtú, preto pri nej používame index „4“):

$$x' = a_{11}x + a_{14}t, \quad t' = a_{41}x + a_{44}t, \quad (15.2.1.2)$$

a spätné transformácie

$$x = a'_{11}x' + a'_{14}t', \quad t = a'_{41}x' + a'_{44}t' \quad (15.2.1.3)$$

Treba určiť koeficienty a_{ij} a a'_{ij} vystupujúce v týchto vzťahoch. Predpokladali sme, že na začiatku, teda v čase $t = t' = 0$ sú začiatky sústav spoločné. Začiatok O' v sústave S' má zrejme trvale súradnicu $x' = 0$. Od začiatku O sústavy S sa však vzdaluje rýchlosťou v (pozdĺž osi x), preto sa jeho x -ová súradnica mení s časom podľa vzťahu $x = vt$. Po dosadení do prvého zo vzťahov (15.2.1.2) dostaneme:

$$x' = a_{11}x + a_{14}t \rightarrow 0 = a_{11}vt + a_{14}t \Rightarrow a_{14} = -a_{11}v,$$

takže vzťah nadobudne tvar

$$x' = a_{11}(x - vt). \quad (*)$$

Podobne, pre bod O platí $x = 0$, $x' = -vt'$, odkiaľ získame vzťah

$$x = a'_{11}(x' + vt'). \quad (**)$$

Pri ďalšej úprave využijeme najprv prvý Einsteinov postulát, podľa ktorého sú obidve sústavy rovnocenné, z čoho vyplýva, že koeficienty a_{11} a a'_{11} nemôžu byť rôzne, t.j. $a_{11} = a'_{11}$. V nasledujúcom kroku využijeme druhý postulát, t.j. rovnakú rýchlosť svetla v obidvoch sústavách. Pritom urobíme myslený pokus so šírením svetla v týchto sústavách – v okamihu, keď sú ich začiatky spolu, blikne tam zdroj svetla. Svetelný signál sa v obidvoch sústavách šíri rovnakou rýchlosťou, teda aj pozdĺž osi x , aj pozdĺž osi x' . To znamená, že v istom okamihu t' , ktorému v sústave S zodpovedá časový údaj t , svetelný signál v sústave S' dosiahne bod $x' = ct'$ a v sústave S bod $x = ct$. Tieto údaje dosadíme do vzťahov (*) a (**):

$$ct' = a_{11}(ct - vt) = a_{11}t(c - v), \quad ct = a_{11}(ct' + vt') = a_{11}t'(c + v).$$

Rovnice navzájom vynásobíme, čím získame rovnosť:

$$c^2 tt' = a_{11}^2 tt' (c^2 - v^2) \Rightarrow a_{11}^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \Rightarrow a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Transformačné vzťahy pre súradnice x a x' tak nadobudnú tvar:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}. \quad (15.2.1.4)$$

Z týchto dvoch rovníc získame transformácie časových súradníc:

$$\begin{aligned} x' \sqrt{1 - (v^2/c^2)} &= x - vt \Rightarrow x' \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - vt \Rightarrow \\ vt &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - x' \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = \frac{x' + vt' - x'[1 - (v^2/c^2)]}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \Rightarrow \\ vt &= \frac{vt' + x'(v^2/c^2)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \end{aligned}$$

odkiaľ získavame výsledný transformačný vzťah medzi časovými súradnicami t a t' :

$$t = \frac{t' + x'(v/c^2)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}. \quad (15.2.1.5)$$

Podobným postupom by sme získali aj opačný transformačný vzťah, t.j. vyjadrenie času t' pomocou času t .

Transformačné vzťahy sme počítali v špeciálnom prípade, keď vzájomná rýchlosť sústav mala iba x -ovú zložku. Vtedy sa súradnice y a z nemenia, takže kompletne **Lorentzove transformačné vzťahy** môžeme pre tento špeciálny prípad zapísať takto:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, & x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \\ y' &= y, & y &= y' \\ z' &= z, & z &= z' \\ t' &= \frac{t - x(v/c^2)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, & t &= \frac{t' + x'(v/c^2)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}. \end{aligned} \quad (15.2.1.6)$$

Galileiho transformácie sú špeciálnym prípadom týchto transformácií, a to pri malých vzájomných rýchlostiach inerciálnych sústav, t.j. keď $v \ll c$, resp. pri $c \rightarrow \infty$. Výraz v/c^2 vtedy môžeme zanedbať a odmocninu v menovateli považovať za rovnú jednotke. Zo vzťahu (15.2.1.5) vtedy vyplýva $t = t'$, čo znamená, že časové súradnice bodovej udalosti sú v takýchto sústavách rovnaké. Predpokladom $c \rightarrow \infty$

v podstate akceptujeme okamžité šírenie signálov na diaľku, čo predpokladá klasická mechanika, vrátane Newtonovej teórie o gravitačnom pôsobení..

Na záver je vhodné znova pripomenúť, že Lorentzove transformácie (15.2.1.6) sa týkajú dvoch inerciálnych sústav, ktorých osi x ležia v jednej priamke. Existujú transformačné vzťahy týkajúce sa inej vzájomnej orientácie sústav, sú pochopiteľne zložitejšie, ale z fyzikálneho hľadiska neprinášajú nové informácie.

Kontrolné otázky

1. Čím sa odlišujú Lorentzove transformácie od Galileiho?
2. Kedy sa Lorentzove transformácie redukovú na Galileiho?
3. V akom prípade sa súradnice y a z zachovávajú? Kedy by sa transformovali?

15.2.2 Kontrakcia dĺžok a dilatácia času

Z Lorentzových transformačných vzťahov vyplýva, že rozmery predmetov sa z rôznych inerciálnych sústav nejavia ako rovnaké. Pritom hneď v úvode treba upozorniť, že tento jav by bol reálne pozorovateľný až pri takých vzájomných rýchlostiach sústav, ktoré sú porovnateľné s rýchlosťou svetla.

Predpokladajme, že v sústave S' na osi x' je umiestnená tyč, ktorej koncové body majú súradnice x_1' a x_2' , takže jej dĺžka v tejto sústave je $\ell' = x_2' - x_1'$. Ak chceme určiť dĺžku tyče zo sústavy S , ktorá sa vzhľadom na tyč pohybuje, musíme súradnice jej koncov zmerať v tejto sústave súčasne (v jedinom okamihu), inak by sa tyč počas merania posunula. Preto musíme použiť taký transformačný vzťah, v ktorom vystupuje čas t sústavy S a nie čas t' :

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

pričom $t_2 = t_1$. Dĺžku tyče získame ako rozdiel súradníc:

$$\ell' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{\ell}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

odkiaľ vyplýva výsledok

$$\ell = \ell' \sqrt{1 - (v^2/c^2)}. \quad (15.2.2.1)$$

Keďže $\sqrt{1 - (v^2/c^2)} < 1$, tak zo vzťahu (15.2.2.1) vyplýva, že $\ell < \ell'$. Tyč bola v pokoji v sústave S' , takže z pohybujúcej sústavy sa tyč javí ako skrátená.

Situáciu môžeme otočiť a zo sústavy S' pozorovať tyč, ktorá je v pokoji v sústave S . Teraz bude musieť merať súradnice koncových bodov pozorovateľ zo

sústavy S' , v rovnakých časových okamihoch $t'_1 = t'_2$. Preto treba použiť alternatívny transformačný vzťah a z neho vypočítať dĺžku tyče:

$$x_1 = \frac{x'_1 - vt'_1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad x_2 = \frac{x'_2 - vt'_2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

odkiaľ pre vzťah medzi dĺžkami tyče meranými z dvoch rôznych inerciálnych sústav dostaneme:

$$\ell' = \ell \sqrt{1 - (v^2/c^2)}. \quad (15.2.2.2)$$

Aj v tomto prípade sa tyč javí ako kratšia tomu pozorovateľovi, ktorý sa vzhľadom na ňu pohybuje.

Všimnime si ešte jednu okolnosť – skrátenie tyče nezávisí od smeru pohybu tyče, či sa pohybuje smerom k pozorovateľovi, alebo od neho.

Príklad 15.2.2.1 Aká veľká by musela byť vzájomná rýchlosť sústav, aby sa pohybujúcejmu pozorovateľovi javila tyč skrátená o 10% ?

Riešenie: Použijeme vzťah (15.2.2.2), pričom požadujeme, aby $\ell'/\ell = 0,9$.

Výsledok: $v = 0,436 c$, čo je takmer polovica rýchlosti svetla.

Podobne ako dĺžka, ani **časový interval** medzi dvoma udalosťami pozorovanými z dvoch inerciálnych sústav, nemusí byť rovnaký. Predpokladajme, že v sústave S v mieste x_1 sa udejú dve krátke udalosti, jedna v čase t_1 , druhá v čase t_2 . Časový interval medzi týmito udalosťami je $\Delta t = t_2 - t_1$. Pozorovateľ zo sústavy S' zaregistruje tieto udalosti v časových okamihoch t'_1 a t'_2 , pre ktoré podľa Lorentzových transformácií platí:

$$t'_1 = \frac{t_1 - x_1(v/c^2)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad t'_2 = \frac{t_2 - x_2(v/c^2)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad \text{pričom } x_2 = x_1.$$

Takže pozorovateľ v S' nameria časový interval

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}. \quad (15.2.2.3)$$

Preto $\Delta t' > \Delta t$, takže pozorovaný časový interval v S' je väčší než v sústave S , v ktorej sa udalosti udiali na tom istom mieste.

Aj v tomto prípade sa rozdiel v dĺžkach časových intervalov reálne prejaví iba vtedy, keď vzájomná rýchlosť sústav je porovnateľná s rýchlosťou svetla. Preto sa tieto relativistické efekty – kontrakcia dĺžok a dilatácia časových intervalov – nedajú v bežnom živote pozorovať. A podobne ako pri kontrakcii dĺžky, ani v tomto prípade smer pohybu hodínok voči pozorovateľovi neovplyvňuje výsledok.

S transformáciou časových súradníc súvisí aj **relatívnosť súčasnosti** dvoch udalostí. Ak v jednej sústave konštatujeme, že na dvoch rozličných miestach súčasne

blikli svetelné zdroje, z inej inerciálnej sústavy sa tieto udalosti nejavia ako súčasné. Nech v miestach x_1 a x_2 bliknú zdroje v čase t_1 . V sústave S' budú tieto udalosti pozorované v okamihoch

$$t'_1 = \frac{t_1 - x_1(v/c^2)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad t'_2 = \frac{t_1 - x_2(v/c^2)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}},$$

takže

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(x_1 - x_2)(v/c^2)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}},$$

odkiaľ vidno, že $t'_2 - t'_1$ sa nerovná nule.

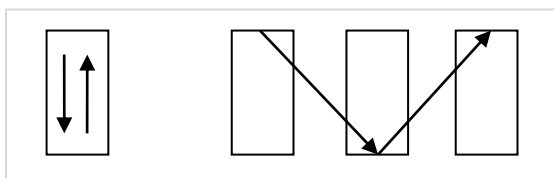
Tento výsledok nabáda k otázke, či sa pri pozorovaní z inej inerciálnej sústavy nemôže zameniť poradie dvoch udalostí. Je logické, že poradie príčinné súvisiacich udalostí sa nedá zameniť. Zameniť by sa dalo poradie len takých dvoch udalostí, ktoré sa udiali v miestach vzdialených viac než súčin rýchlosti svetla a časového intervalu medzi týmito udalosťami. Vtedy sa druhá udalosť udiala prv, než k nej mohla prísť informácia o prvej udalosti, čo znamená, že prvá udalosť nemohla byť príčinou druhej.

Príklad 15.2.2.2 Častica má v našej laboratórnej sústave dobu života 10^{-6} s. Aký je tento časový interval v sústave viazanej na túto časticu, ak sa pohybuje rýchlosťou predstavujúcou 98 % rýchlosti svetla? Akú dlhú dráhu prejde v našej laboratórnej sústave, a akú vo svojej?

Riešenie. Vznik a zánik častice z hľadiska sústavy viazanej na časticu sa udial na tom istom mieste, takže z našej sústavy pozorujeme dlhšiu dobu jej života. Využijeme vzťah (15.2.2.3): $\Delta t' = \Delta t / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, pričom nečiarkovaná sústava je viazaná na časticu. Takže $\Delta t' = 10^{-6}$ s a pre časový interval v sústave viazanej na časticu vychádza $\Delta t = 1,99 \times 10^{-7}$ s, čo je približne päťkrát menej. Prejdená dráha v našej sústave $l = 294$ m, dráha v sústave viazanej na časticu je zrejme nulová.

Príklad 15.2.2.3 Svetelné hodiny

Vo valcovej nádobe s výškou l sa svetelný lúč odráža od zrkadiel umiestnených na základniach, takže „tikanie“ takýchto hodín si vieme stotožniť s odrazmi lúča od základní. Na obrázku je nakreslená situácia z pohľadu vzťažnej sústavy vzhľadom na ktorú je nádoba v pokoji, ako aj z pohľadu sústavy, vzhľadom na ktorú sa nádoba pohybuje. Vypočítajte pomer časových intervalov potrebných na prelet lúča k opačnej



základni v uvedených dvoch prípadoch za predpokladu, že svetlo sa šíri rýchlosťou c a pohybujúca sa sústava sa vzdáľuje rýchlosťou v .

Riešenie: V sústave S' , vzhľadom na ktorú nech je nádoba v pokoji, časový interval potrebný na prelet svetelného signálu medzi základňami je vyjadrený vzťahom

$$\Delta t' = \frac{\ell}{c}.$$

V sústave S, vzhľadom na ktorú sa nádoba pohybuje, je potrebný časový interval Δt dlhší, lebo svetlo pri rovnakej rýchlosti c musí prejsť vzdialenosť vyjadrenú vzťahom $\sqrt{\ell^2 + (v\Delta t)^2}$, kde v je vzájomná rýchlosť sústav. Takže platí rovnosť:

$$c^2(\Delta t)^2 = \ell^2 + (v\Delta t)^2,$$

odkiaľ vypočítame interval Δt :

$$(\Delta t)^2(c^2 - v^2) = \ell^2, \Rightarrow \Delta t = \frac{\ell}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{\ell}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Výsledok potvrdzuje predpokladaný vzťah medzi intervalmi: $\Delta t > \Delta t'$, t.j. zo sústavy, ktorá sa vzhľadom na nádobu pohybuje, časový interval sa javí ako dlhší.

Príklad 15.2.2.4

Predpokladajme, že k Marsu (vzdialenosť $d = 8 \times 10^{10}$ m) môžeme letieť rýchlosťou $0,5 \cdot c$. Ak let v našej sústave S začal v čase $t_1 = 0$, v akom čase t_2 by sme prišli do cieľa? Ako by sa javil tento časový údaj na hodinách posádky kozmickej lode (t'_2)? Ako by ohodnotila vzdialenosť k Marsu (d') posádka lode? Začiatok cesty má v S súradnicu $x_1 = 0$, koniec cesty $x_2 = 8 \times 10^{10}$ m.

Riešenie:

Z pohľadu sústavy viazanej na Zem čas t_2 zodpovedá dobe letu, ktorú získame ako podiel vzdialenosti a rýchlosti:

$$t_2 = \frac{d}{v} = \frac{8 \times 10^{10} \text{ m}}{(0,5 \times 3 \times 10^8) \text{ m/s}} = 5,333 \times 10^2 \text{ s}.$$

Čas t'_2 získame pomocou Lorentzovej transformácie:

$$t'_2 = \frac{t_2 - (v/c^2)x_2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{5,333 \times 10^2 - \frac{0,5}{3 \times 10^8} \times 8 \times 10^{10}}{\sqrt{1 - (0,5)^2}} = \frac{(5,333 - 4/3) \times 10^2}{0,866}$$

$$t'_2 = 4,6188 \times 10^2 \text{ s}.$$

Z hľadiska sústavy viazanej na pohybujúcu kozmickú loď sa vzdialenosť k Marsu javí ako kratšia

$$d' = d\sqrt{1 - (v/c)^2} = 8 \times 10^{10} \times 0,866 = 6,9282 \times 10^{10} \text{ m}.$$

a tak pre trvanie letu ostaneme hodnotu

$$\Delta t' = \frac{d'}{0,5 c} = \frac{6,9282 \times 10^{10}}{1,5 \times 10^8} = 4,6188 \times 10^2 \text{ s},$$

čo sa zhoduje s údajom t'_2 .

Očakávanú nulovú hodnotu súradnice x'_2 koncového bodu cesty z hľadiska sústavy viazanej na loď získame aj Lorentzovou transformáciou:

$$x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{8 \times 10^{10} - 1,5 \times 10^8 \times 5,333 \times 10^2}{0,866} = 0.$$

Predĺženie časového intervalu môže nastať aj vplyvom **Dopplerovho javu**. Ak sa zdroj a pozorovateľ od seba vzdávajú, pričom zdroj vysiela krátke signály v pravidelných časových intervaloch (napr. záblesky svetla), tak pozorovateľ nameria medzi zábleskami dlhší časový interval. Ak by sa však k sebe približovali, tak pozorovateľ nameria kratší interval. Ide o ďalší jav, ktorý však nie je v rozpore s teóriou relativity. Ich veľkosti sú posúdené v nasledujúcej úvahe.

Z hľadiska teórie relativity, ak sa zdroj vzdáľuje od pozorovateľa rýchlosťou v , a vysiela signály s časovým odstupom Δt , tak pozorovateľ nameria časový odstup $\Delta t' = \Delta t / \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Pri malom pomere v/c vyjadríme odmocninu prvými dvoma členmi binomického rozvoja:

$$\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \cong 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

Pri Dopplerovom jave v takejto situácii na základe vzťahov zo šiestej kapitoly (šiesteho zošitka)

$$\Delta t' = \Delta t \frac{c + v}{c} = \Delta t \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Ide teda o porovnanie veľkosti členov v/c a v^2/c^2 , z ktorého je zrejmé, že pri malom pomere v/c sa výraznejšie prejaví Dopplerov jav. Táto okolnosť má význam pri sledovaní spektier veľmi vzdialených galaxií.

Kontrolné otázky

1. Tyč pohybujúca sa v kladnom smere osi x sa javí ako kratšia. Ako sa bude javiť, ak sa bude pohybovať opačným smerom?
2. Rovnaké tyče sa nachádzajú v dvoch inerciálnych sústavách, ktoré sa navzájom pohybujú rýchlosťou v . Ktorá z nich sa javí ako kratšia?
3. Dvoje rovnakých hodín sa nachádzajú v dvoch inerciálnych sústavách vzdáľujúcich sa od seba rýchlosťou v . Ktoré z hodín sa oneskorujú?
4. Hodiny vzdáľujúce sa od nás sa oneskorujú. Čo budeme pozorovať, ak sa budú približovať?
5. V čom je rozdiel medzi relativistickou dilatáciou času a Dopplerovým posunom frekvencie?

15.2.3 Transformácia rýchlosti

Z Galileiho transformačných vzťahov vyplýva, že rýchlosti sa sčítavajú tak, ako sa nám to javí z bežného pozorovania skladania pohybov. Michelsonov – Morleyov pokus však ukázal, že treba nájsť iný transformačný vzťah.

Aj v tomto prípade budeme uvažovať o dvoch sústavách, ktoré majú vzájomne rovnobežné súradnicové osi, pričom ich začiatky sa navzájom vzdďľujú pozdľž osí x , resp. x' . V sústave S nech sa pozdľž osi x pohybuje častica rýchlosťou $u = dx/dt$. Pozorovateľ zo sústavy S' nameria častici rýchlosť $u' = dx'/dt'$, pre ktorú podľa Galileiho transformačných vzťahov platí $u' = u - v$, kde v je vzájomná rýchlosť sústav. Ako sa ukáže, Galileiho transformačný vzťah pre rýchlosť je špeciálnym prípadom Lorentzovho transformačného vzťahu. Rýchlosť u' vypočítame pomocou Lorentzovho transformačného vzťahu pre súradnicu x' :

$$\begin{aligned} u'_x = \frac{dx'}{dt'} &= \frac{d}{dt'} \left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \right) = \frac{\frac{dx}{dt'} - v \frac{dt}{dt'}}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{dt}{dt'} - v \frac{dt}{dt'}}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \\ &= \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \frac{dt}{dt'}. \end{aligned}$$

Na dokončenie výpočtu treba ešte vypočítať člen dt/dt' , čo získame derivovaním transformačného vzťahu pre čas (15.2.1.6):

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \left\{ \frac{t' + x'(v/c^2)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \right\} = \frac{1 + (v/c^2)(dx'/dt')}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{1 + (v/c^2)u'_x}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}.$$

Po dosadení do predchádzajúceho vzťahu postupnou úpravou dostaneme:

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \frac{dt}{dt'} = \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \frac{1 + (v/c^2)u'_x}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad \Rightarrow \\ u'_x [1 - (v^2/c^2)] &= u_x - v + (v/c^2)u_x u'_x - (v^2/c^2)u'_x \Rightarrow \\ u'_x \left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right) &= u_x - v, \end{aligned}$$

a odtiaľ konečný vzťah

$$u'_x = \frac{u_x - v}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)}. \quad (15.2.3.1)$$

Pre transformáciu zo sústavy S' do sústavy S platí podobný vzťah:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{\left(1 - \frac{u'_x v}{c^2} \right)}. \quad (15.2.3.2)$$

V oboch prípadoch vidno, že pri malých vzájomných rýchlostiach sústav, tj. keď výraz $u_x v / c^2 \ll 1$, tak vzťahy sa zmenia na Galileiho transformácie rýchlosti. Z Lorentzových transformačných vzťahov vyplývajú aj ďalšie zaujímavé vlastnosti, ktoré si overíme na nasledujúcich príkladoch.

Príklad 15.2.3.1 Dve častice sa pohybujú proti sebe rýchlosťami, $0,8c$ a $0,7c$, ktoré nameral pozorovateľ nachádzajúci sa medzi nimi. Akú rýchlosť druhej častice by nameral pozorovateľ viazaný na prvú časticu?

Riešenie. Častica s rýchlosťou $0,8c$ nech sa pohybuje v kladnom smere osi x sústavy S viazanej na pozorovateľa, a na túto časticu viažme sústavu S' , takže do vzťahu (15.2.3.1) dosadíme $v = +0,8c$. Druhá častica sa potom pohybuje opačným smerom, takže $u_x = -0,7c$. Po dosadení týchto hodnôt dostaneme

$$u'_x = \frac{u_x - v}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} = \frac{-0,7c - 0,8c}{1 - \frac{(-0,7c)0,8c}{c^2}} = \frac{-1,5c}{1 + 0,56} \cong -0,96c.$$

Takže rýchlosť nie je väčšia než rýchlosť svetla.

Príklad 15.2.3.2 Vzhľadom na sústavu S sa pohybuje fotón rýchlosťou svetla, t.j. rýchlosťou $u_x = c$. Aká je jeho rýchlosť vzhľadom na sústavu S' , ktorá sa vzhľadom na sústavu S pohybuje rýchlosťou v ?

Riešenie: Po dosadení údajov do vzťahu (15.2.3.1) dostaneme

$$u'_x = \frac{c - v}{\left(1 - \frac{cv}{c^2}\right)} = \frac{c - v}{\frac{c^2 - cv}{c^2}} = \frac{c^2(c - v)}{c(c - v)} = c,$$

čo znamená, že fotón sa aj v čiarkovanej sústave pohybuje rovnakou rýchlosťou, ako v sústave S . Výsledok je v súlade s druhým Einsteinovým postulátom.

Druhý príklad dokumentuje skutočnosť, že rýchlosť svetla nezávisí od rýchlosti inerciálnej sústavy vzhľadom na zdroj svetla, vždy je rovnaká. Je to v zhode s Michelsonovým – Morleyovým experimentom i s pokusom s atómovými hodinami.

Z výsledného vzťahu vyjadrujúceho transformáciu rýchlosti vyplýva zaujímavý výsledok – pri extrapolácii rýchlosti svetla k nekonečne veľkej hodnote, vzťah sa mení na Galileiho. Teda aj v tomto prípade sa ukazuje, že klasický vzťah je špeciálnym prípadom relativistického vzťahu.

Transformujú sa aj zložky rýchlosti, ktoré sú kolmé na smer vzájomného pohybu sústav, tj. v tomto prípade kolmé na os x . Napríklad pri pohybe telesa v smere osi y , keď sa jeho súradnica x v sústave S nemení, teleso v sústavách S aj S' prejde rovnakú vzdialenosť $\Delta y' = \Delta y$, v sústave S za časový interval Δt , ale zo sústavy S' sa tento časový interval javí ako dlhší. To znamená, že pohyb v smere osi y (a aj v smere osi z) sa z pohybujúcej sústavy javí ako pomalší (výpočet je v dodatku D2).

15.2.4 Časopriestor, štvorvektory

V karteziánskej súradnicovej sústave, v trojrozmernom priestore, používame na vyjadrenie polohy bodu v priestore tri súradnice: x , y , z . Pri opise dejov v teórii relativity sa aj čas používa ako súradnica, ktorá je prostredníctvom Lorentzových transformácií zviazaná s karteziánskymi súradnicami. Tak vzniká akýsi štvorrozmerný **časopriestor**, ktorého súradnicami sú

$$x, y, z, ict, \quad (15.2.4.1)$$

kde sa ako štvrtá súradnica nepoužíva priamo čas, ale súčin času a rýchlosti svetla. Tým aj táto súradnica nadobúda rozmer dĺžky a nie času. Z dôvodov matematickej výhodnosti sa k tejto súradnici navyše pripája imaginárna jednotka i . Štyri súradnice v časopriestore určujú nielen polohu, ale aj časový okamih **bodovej udalosti**. Druhými mocninami súradníc bodovej udalosti sú výrazy

$$x^2, y^2, z^2, -c^2t^2, \quad (15.2.4.2)$$

ktoré majú tú vlastnosť, že ich súčet sa nezmení, keď súradnice bodovej udalosti transformujeme do inej inerciálnej sústavy prostredníctvom Lorentzových transformácií. Ide o podobnú vlastnosť ako v trojrozmernom priestore, kde sa pri transformácii polohového vektora do pootočenej súradnicovej sústavy nezmení (zachová) súčet štvorcov jeho karteziánskych súradníc $x^2 + y^2 + z^2$, rovnajúci sa druhej mocnine (štvorcu) jeho dĺžky. Inými slovami – pri takejto transformácii sa dĺžka vektora nezmení. Z tejto úvahy vyplýva, že aj súradnice (15.2.4.1) môžeme považovať za súradnice vektora, pravda v štvorrozmernom časopriestore.

O invariantnosti súčtu štvorcov súradníc (15.2.4.2) vzhľadom na transformáciu do inej inerciálnej sústavy sa presvedčíme tak, že všetky súradnice v súčte nahradíme súradnicami „čiarkovanými“, využitím Lorentzových transformácií (15.2.1.6):

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \Rightarrow \left[\frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \right]^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 \left[\frac{t' + x'(v/c^2)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \right]^2.$$

Jednoduchým výpočtom sa môžete presvedčiť, že súčet výrazov v hranatých zátvorkách poskytne výsledok:

$$\left[\frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \right]^2 - c^2 \left[\frac{t' + x'(v/c^2)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \right]^2 = x'^2 - c^2t'^2.$$

Po doplnení súradníc y' a z' ktoré sa nemenili, dostávame očakávaný výsledok:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 \quad (15.2.4.3)$$

„Vzdialenosť“ medzi dvoma bodmi v štvorrozmernom časopriestore, t.j. „vzdialenosť“ medzi dvoma bodovými udalosťami, v teórii relativity nazývanú

interval , sa počíta analogickým spôsobom, ako v trojrozmernom priestore. Jej druhú mocninu vyjadruje vzťah

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \quad (15.2.4.4)$$

Súradnice (15.2.4.1) sú súradnicami bodu v štvorrozmernom časopriestore, teda súradnicami **štvorvektora polohy**. Zaužívalo sa všetky označovať jediným písmenom x , a odlišovať len indexmi:

$$x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y, \quad x_3 \equiv z, \quad x_4 \equiv ict. \quad (15.2.4.5)$$

Pre takto zavedené súradnice nadobúdajú Lorentzove transformácie trochu odlišný tvar. Keď zavedieme označenie $\beta = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$, potom transformácie vyzerajú takto:

$$x'_1 = \beta \left(x_1 + i \frac{v}{c} x_4 \right), \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad x'_4 = \beta \left(x_4 - i \frac{v}{c} x_1 \right) \quad (15.2.4.6)$$

Aj ďalšie vektorové veličiny sa v teórii relativity zavádzajú ako štvorvektory, napríklad štvorvektor rýchlosti, hybnosti, či prúdovej hustoty.

Pri **štvorvektore rýchlosti** sa jeho prvá súradnica zavádza vzťahom (a podobne aj druhá a tretia):

$$u_1 = \beta \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{u_x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \beta u_x \quad (15.2.4.7)$$

a štvrtá súradnica vzťahom

$$u_4 = \frac{ic \, dt}{dt\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{ic}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \beta ic. \quad (15.2.4.8)$$

Výraz $dt\sqrt{1 - (v/c)^2}$ predstavuje tzv. **vlastný čas**, presnejšie vlastný časový interval, čím sa rozumie časový interval pozorovaný v inerciálnej sústave spojenej s pohybujúcou sa časticou. Vlastný čas je invariantný, čo spolu s invariantnosťou štvorvektora polohy zabezpečuje invariantnosť štvorvektora rýchlosti.

Tú si overíme tak, že najprv vypočítame druhú mocninu veľkosti štvorvektora rýchlosti častice, ktorá sa v sústave S pohybuje rýchlosťou u_x (predpokladáme že druhá a tretia súradnica, sú nulové, čo neovplyvní výsledok). Pre súčet štvorcov prvej a štvrtej súradnice štvorvektora rýchlosti tak dostaneme:

$$(u_1)^2 + (u_4)^2 = (\beta u_x)^2 + (\beta ic)^2 = \beta^2(u_x^2 - c^2) = \frac{u_x^2 - c^2}{1 - (v^2/c^2)}. \quad (15.2.4.9)$$

Invariantnosť veľkosti štvorvektora rýchlosti znamená, že v inej inerciálnej sústave súčet $(u'_1)^2 + (u'_4)^2$ poskytne rovnaký výsledok. Pri výpočte použijeme transformačné vzťahy (15.2.4.6) aplikované na štvorvektor rýchlosti (vzťahy pre druhú a tretiu súradnicu vynechávame, lebo sa transformáciou nemenia) a využijeme aj definície (15.2.4.7) a (15.2.4.8) súradníc štvorvektora rýchlosti:

$$u'_1 = \beta \left(u_1 + i \frac{v}{c} u_4 \right), \quad u'_4 = \beta \left(u_4 - i \frac{v}{c} u_1 \right)$$

$$u_1 = \beta u_x, \quad u_4 = \beta i c.$$

Pre súčet štvorcov čiarkovaných súradníc tak dostávame:

$$\begin{aligned} (u'_1)^2 + (u'_4)^2 &= \beta^2 \left\{ (u_1)^2 - \frac{v^2}{c^2} (u_4)^2 + 2i \frac{v}{c} u_1 u_4 + (u_4)^2 - \frac{v^2}{c^2} (u_1)^2 - 2i \frac{v}{c} u_1 u_4 \right\} \\ &= \beta^2 \left\{ (u_1)^2 \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right] + (u_4)^2 \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right] \right\} = (u_1)^2 + (u_4)^2. \end{aligned}$$

Výsledok ukazuje, že transformáciou do inej inerciálnej sústavy sa veľkosť štvorvektora rýchlosti nemení, že hodnota vyjadrená vzťahom (15.2.4.9) sa pri transformácii zachováva.

Štvorvektor rýchlosti je teda vzťahmi (15.2.4.7) a (15.2.4.8) dobre definovaný, lebo jeho veľkosť sa Lorentzovými transformáciami nemení. Za predpokladu, že $u_x = v$, teda že „čiarkovaná“ sústava je spojená s pohybujúcou sa časticou, pre súčet druhých mocnín súradníc štvorvektora vychádza hodnota $-c^2$.

Ďalšie štvorvektory budú opísané v nasledujúcich článkoch.

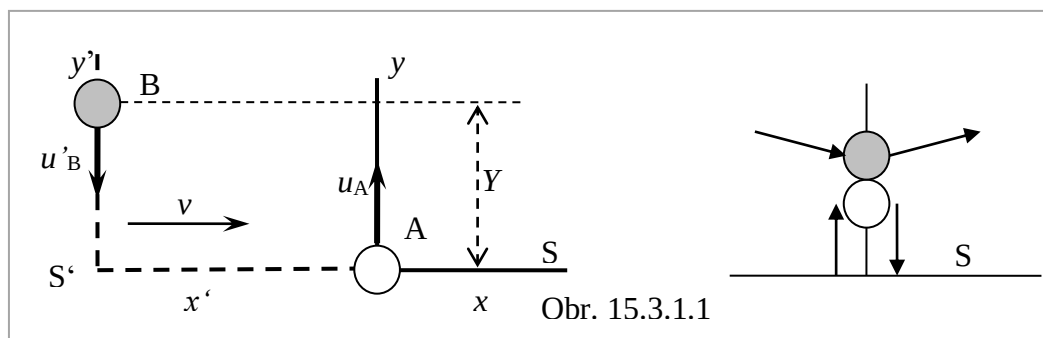
15.3 Mechanika v teórii relativity

Nielen dĺžky a časové intervaly sa menia pri pozorovaní z rôznych inerciálnych sústav, ale aj hmotnosť telies. Zo vzťahu (15.2.3.1), vyjadrujúceho transformáciu rýchlosti vyplýva, že zrýchlenie telies pozorované z rozličných inerciálnych sústav, nie je rovnaké. To je v rozpore s klasickou mechanikou, s Galileiho transformáciami, podľa ktorých je zrýchlenie vo všetkých inerciálnych sústavách rovnaké. Preto môžeme očakávať, že aj Newtonov zákon sily z hľadiska teórie relativity bude mať iný tvar. V tejto časti bude najprv odvodená závislosť hmotnosti telies od rýchlosti, v ďalšom článku vzťah medzi hmotnosťou a energiou, a v treťom článku vzťah medzi hybnosťou a energiou. Pritom vyjadrenie sily ako derivácie hybnosti podľa času zostáva rovnaké ako v klasickej mechanike, ale rozdiel je v závislosti hmotnosti od rýchlosti.

15.3.1 Závislosť hmotnosti od rýchlosti

V tomto článku bude odvodený vzťah, podľa ktorého sa pozorovaná hmotnosť telesa s rastúcou rýchlosťou telesa zväčšuje, pričom ako najmenšiu ju určí pozorovateľ, vzhľadom na ktorého je teleso v pokoji. Keď sa teleso začne pohybovať, pozorovateľ zaregistruje zväčšenie jeho hmotnosti.

Budeme uvažovať o dvoch rovnakých telesách A, B, nehybne umiestnených v inerciálnych sústavách S a S', ktoré sa navzájom pohybujú rýchlosťou v . Teleso A je umiestnené v začiatku sústavy S, teleso B v sústave S', na jej osi y' vo vzdialenosti Y od začiatku sústavy (obr.15.3.1.1). Pripomeňme si, že podľa špeciálnych transformačných vzťahov (15.2.1.6) $y' = y$, takže teleso A má v oboch sústavách túto súradnicu nulovú a teleso B súradnicu Y .



Keď sú začiatky sústav v istej vhodnej vzájomnej vzdialenosti, telesám udelíme (z pohľadu svojich sústav) rovnaké rýchlosti v smeroch osí y , resp. y' tak, aby sa stretli v strede vzdialenosti Y , a po dokonale pružnom zraze vrátili do pôvodných polôh. Rýchlosť udelenú telesu A označíme ako u_A , takže na návrat potrebuje časový interval $T = Y/u_A$. Teleso B v sústave S' na návrat do pôvodnej polohy potrebuje rovnaký časový interval (sústavy sú rovnocenné), vyjadrený vzťahom $T' = Y/u'_B$.

Vzhľadom na rovnocennosť sústav sú rýchlosti telies, aj časové intervaly potrebné na návrat telies do pôvodnej polohy, z pohľadu svojich sústav, rovnaké. Časový interval T' , potrebný na návrat telesa B do pôvodnej polohy, z pohľadu sústavy S je však dlhší než T , lebo sa uplatní dilatácia času. A naopak, rovnako väčším sa javí časový interval T zo sústavy S' . Preto z pohľadu sústavy S platí vzťah

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} . \quad (15.3.1.1)$$

To sa prejaví aj na veľkosti rýchlosti v smere osi y . Zatiaľ čo rýchlosť telesa B vzhľadom na sústavu S' je u'_B (a je rovnako veľká ako rýchlosť u_A telesa A vzhľadom na sústavu S), jej veľkosť u_B vzhľadom na sústavu S je menšia (vzťah 15.2.3.2):

$$u_B = u'_B \sqrt{1 - (v^2/c^2)} . \quad (15.3.1.2)$$

Hmotnosť telies teraz posúdime prostredníctvom zákona zachovania hybnosti, ktorého platnosť predpokladáme. Na telesá A a B pri zrážke nepôsobili vonkajšie sily, takže hybnosť sústavy dvoch telies by sa pri zrážke nemala zmeniť. Podľa pôvodného predpokladu sa teleso A do východiskovej polohy vrátilo s pôvodnou rýchlosťou u_A a teda aj s pôvodnou hybnosťou. Preto usudzujeme, že aj teleso B malo pred zrážkou v smere osi y rovnakú hybnosť. Túto skutočnosť zapíšeme rovnosťou vyjadrujúcou zákon zachovania hybnosti, pričom zákon zapíšeme z pohľadu sústavy S, t.j. všetky veličiny v ňom vystupujúce, sa vzťahujú na túto sústavu:

$$m_A u_A = m_B u_B .$$

Rýchlosť u_B nahradíme podľa vzťahu (15.3.1.2):

$$m_A u_A = m_B u'_B \sqrt{1 - (v^2/c^2)} ,$$

ale už vieme, že veľkosti rýchlostí u'_B a u_A sú rovnaké. Po ich vykrátení získame vzťah

$$m_B = \frac{m_A}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} ,$$

ktorý už vyjadruje závislosť hmotnosti telesa od rýchlosti. Rýchlosť u_A môže byť totiž celkom malá, takže m_A môžeme v sústave S považovať za hmotnosť nepohybujúceho sa telesa, zatiaľ čo teleso B sa vzhľadom na sústavu S pohybuje navyše aj veľkou rýchlosťou v . Telesá sme na začiatku úvahy považovali za rovnaké, takže vzťah pre závislosť hmotnosti od rýchlosti prepíšeme do konečného tvaru

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} , \quad (15.3.1.2)$$

kde m_o predstavuje tzv. **pokojuvú hmotnosť** telesa a m jeho hmotnosť v prípade, že sa vzhľadom na pozorovateľa pohybuje rýchlosťou v .

Tento výsledok, ktorý je v rozpore s klasickým ponímaním hmotnosti, bol vierohodne experimentálne overený už v roku 1908 Alfredom Buchererom, ktorý zistil, že podiel elektrického náboja a hmotnosti elektrónu sa s narastajúcou rýchlosťou elektrónu znižuje. Pritom náboj elektrónu je relativistický invariant (vo všetkých inerciálnych sústavách je rovnako veľký → pozri článok 15.4.3), takže výsledok experimentu sa dá vysvetliť iba zväčšovaním hmotnosti. Odvtedy bolo uskutočnených mnoho pokusov potvrdzujúcich túto závislosť s vysokou presnosťou. Potvrdzuje sa aj v moderných urýchľovačoch elementárnych častíc. Keď rýchlosť častice dosahuje desať percent rýchlosti svetla, jej hmotnosť vzrastie iba o 5 tisícín, ale pri rýchlosti $0,9c$ narastie na dvojnásobok.

Na záver možno ani nie je potrebné uviesť poznámku, že zmena hmotnosti telesa, o ktorej sa hovorí v teórii relativity, neznamenaá zmenu počtu atómov, z ktorých sa skladá, ale zmenu jeho zotrvačných vlastností.

15.3.2 Súvislosť hmotnosti a energie

Kinetická energia sa v klasickej fyzike vyjadruje vzťahom $E_k = (1/2)mv^2$. Pritom sa samozrejme predpokladá, že hmotnosť telesa je nemenná. V predošlom článku bol však odvodený vzťah, vyjadrujúci nárast hmotnosti telies pri zväčšení rýchlosti vzhľadom na pozorovateľa a tak klasický vzorec nemôže byť korektný pri veľkých rýchlostiach, aké nadobúdajú napr. elementárne častice v urýchľovačoch.

Častica získava kinetickú energiu urýchľovaním, pričom potrebnú prácu konajú urýchľujúce sily F . Východiskový vzťah na výpočet zmeny kinetickej energie bude preto rovnaký ako v klasickej fyzike:

$$\Delta E_k = \int_1^2 F_x dx ,$$

kde čísla 1 a 2 predstavujú začiatočnú a koncovú súradnicu miesta pôsobenia sily, v tomto prípade pozdĺž osi x . Za silu do integrálu dosadíme deriváciu hybnosti častice podľa času (vzťah 3.1.3.4 v zošitku o dynamike hmotného bodu), pričom predpokladáme, že sa pohybuje v smere osi x rýchlosťou u :

$$\Delta E_k = \int_1^2 F_x dx = \int_1^2 \frac{d(mu)}{dt} u dt = \int_0^u u d(mu) .$$

Keby sme počítali ďalej, predpokladajúc že hmotnosť m je konštantná, dostali by sme klasický vzorec kinetickej energie. Do integrálu však za hmotnosť m dosadíme vzťah (15.3.1.2), a tak treba vypočítať integrál

$$\Delta E_k = \int_0^u u \, d\left(\frac{m_o u}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}}\right), \quad (15.3.2.1)$$

kde integračné medze predstavujú interval od začiatkovej nulovej, po konečnú rýchlosť u .

Pri výpočte integrálu použijeme pravidlo $(uv)' = u'v + uv'$, resp. jeho integrálnu podobu, schematicky zapísanú v tvare $\int u'v = uv - \int uv'$:

$$\int_0^u u \, d\left(\frac{m_o u}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}}\right) = \frac{m_o u^2}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} - \int_0^u \frac{m_o u}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} \, du \quad (15.3.2.2)$$

Zostávajúci integrál sa vypočíta substitúciou $1 - (u^2/c^2) = z^2$, po ktorej dostaneme:

$$\int_0^u \frac{m_o u}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} \, du = - \int_1^{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} m_o c^2 \frac{z \, dz}{z} = -m_o c^2 \left[\sqrt{1 - (u^2/c^2)} - 1 \right].$$

Výsledok dosadíme do vzťahu (15.3.2.1)

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= \frac{m_o u^2}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} + m_o c^2 \left[\sqrt{1 - (u^2/c^2)} - 1 \right] \\ &= \frac{m_o u^2 + m_o c^2 [1 - (u^2/c^2)]}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} - m_o c^2 \Rightarrow \\ \Delta E_k &= \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} - m_o c^2 = mc^2 - m_o c^2. \end{aligned}$$

Integrál (15.3.2.2) sme počítali v medziach od 0 po u , takže sme vypočítali celkovú kinetickú energiu. Preto môžeme napísať výsledný vzťah:

$$E_k = mc^2 - m_o c^2. \quad (15.3.2.3)$$

Keď ho napíšeme v tvare:

$$mc^2 = m_o c^2 + E_k$$

môžeme ho interpretovať tak, že výraz

$$E = mc^2 \quad (15.3.2.4)$$

predstavuje celkovú energiu, E_k kinetickú a $E_o = m_o c^2$ tzv. **pokojuvú energiu** (častice, telesa). Podľa tohto vzťahu hmotnosti 1 gram zodpovedá obrovská energia $E = 9 \times 10^{13} \text{ Ws} = 2,5 \times 10^7 \text{ kWh}$.

Vyjadrenie kinetickej energie častice vzťahom (15.3.2.3) bolo potrebné použiť napríklad pri vysvetlení Comptonovho javu (pozri dodatok D4).

Vzťah (15.3.2.3) vyjadrujúci kinetickú energiu prechádza do klasického tvaru uvedeného na začiatku tohto článku v prípade, keď častica (teleso) sa pohybuje malou rýchlosťou v porovnaní s rýchlosťou svetla. Presvedčíme sa o tom binomickým rozvojom vzťahu:

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - m_0c^2 \cong m_0c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \dots\right) - m_0c^2 \Rightarrow$$

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 u^2 .$$

Aj v tomto prípade teda platí, že klasický vzťah je špeciálnym prípadom relativistického vzťahu.

Albert Einstein vo svojej knihe *The Meaning of Relativity* o vzťahu $E = mc^2$ napísal: „*Hmotnosť a energia sa vo svojej podstate zhodujú, je to iba rôzne vyjadrenie toho istého*“.

Max Born v knihe o Einsteinovej teórii relativity k tomuto vzťahu uvádza: „*Hmota v najširšom význame tohto slova (vrátane svetla a iných foriem tzv. čistej energie) má dve fundamentálne vlastnosti – zotrvačnosť, meranú jej hmotnosťou a schopnosť konať prácu, meranú jej energiou. Tieto dve vlastnosti sú si navzájom prísne úmerné. Keby kdekoľvek magnetické či elektrické polia nahromadili energiu, táto energia je vždy spojená so zotrvačnosťou. Elektróny a atómy sú príkladom gigantickej koncentrácie energie.*“

Podľa vzťahu $E = mc^2$ sa počíta zisk energie pri jadrových reakciách, prebiehajúcich napríklad v jadrových reaktoroch, ale aj väzbová energia atómových jadier. Stabilné atómové jadro má vždy menšiu hmotnosť než súčet pokojových hmotností protónov a neutrónov, z ktorých sa skladá. Rozdiel týchto hmotností vynásobený štvorcom rýchlosti svetla sa rovná energii, ktorou sú častice v jadre spolu viazané. Takto vypočítanú energiu treba jadru dodať, aby sa rozpadlo na svoje súčasti.

Používanie vzťahu $E = mc^2$ pri jadrových reakciách je nevyhnutnosťou, ale v podstate platí aj pri chemických reakciách. Tam však ide o také malé zmeny energie, ktoré sa nedajú overiť zmenou hmotnosti reagujúcich atómov. Pri chemických reakciách ide o zmeny energie nanajvýš na úrovni pár elektrónvoltov, pri jadrových reakciách sú to milióny elektrónvoltov. V atóme vodíka je elektrón viazaný k jadru – k protónu, na jeho uvoľnenie z atómu treba dodať energiu, čo znamená, že atóm vodíka má menšiu hmotnosť ako súčet hmotností elektrónu a protónu. Aj v tomto prípade však ide o energiu niekoľkých elektrónvoltov. Principiálne – teplý čaj má z nášho pohľadu väčšiu hmotnosť ako studený, lebo v teplom čaji sa molekuly pohybujú rýchlejšie ako v studenom a teda majú väčšiu hmotnosť. Sú to však prakticky nemerateľné rozdiely.

Relativistické vyjadrenie kinetickej energie častice (15.3.2.3) bolo potrebné použiť napríklad pri vysvetlení Comptonovho javu (pozri dodatok D4).

15.3.3 Súvislosť energie a hybnosti

V predchádzajúcom článku bol odvodený výraz vyjadrujúci celkovú energiu pohybujúcej sa častice.

$$E = mc^2 \quad (15.3.3.1)$$

Keď si uvedomíme, že hmotnosť m závisí od rýchlosti u a túto závislosť dosadíme do vzorca, dostaneme:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow E^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = m_0^2 c^4.$$

Ďalšími úpravami postupne dostaneme:

$$E^2 - E^2 \frac{u^2}{c^2} = m_0^2 c^4 \Rightarrow E^2 - m^2 c^4 \frac{u^2}{c^2} = m_0^2 c^4 \Rightarrow E^2 - m^2 u^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

Súčin $p = mu$ predstavuje hybnosť častice, ktorá sa vzhľadom na inerciálnu sústavu pohybuje rýchlosťou u a má hmotnosť m , takže posledný vzťah môžeme prepísať

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

a nakoniec vyjadriť energiu:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}. \quad (15.3.3.2)$$

Výsledný vzťah poukazuje na skutočnosť, že celková energia častice závisí od jej pokojovej hmotnosti m_0 a od jej hybnosti.

Štvorvektor hybnosti sa zavádza vzťahmi:

$$p_1 = m_0 u_1, \quad p_2 = m_0 u_2, \quad p_3 = m_0 u_3, \quad p_4 = \beta m_0 i c = \frac{i m c^2}{c} = i \frac{E}{c}, \quad (15.3.3.3)$$

kde E je energia častice. Pokojová hmotnosť m_0 je invariant, takže vynásobením súradníc štvorvektora rýchlosti touto hmotnosťou sa invariantnosť vektora nestratí.

Súradnice štvorvektora sily sa zavádzajú vzťahom: $F_i = (dp_i)/d\tau$, takže

$$F_1 = m_0 \frac{du_1}{d\tau}, \quad \dots, \quad F_4 = \frac{i}{c} \frac{dE}{d\tau}, \quad (15.3.3.4)$$

kde $d\tau$ je diferenciál vlastného času.

Zo vzťahu (15.3.3.2) môžeme získať zaujímavú informáciu o fotóne. Fotón má pokojovú hmotnosť nulovú, takže v jeho prípade $m_0 = 0$, čo po dosadení do vzťahu poskytne $E = pc$. Fotón má však energiu hf , kde h je Planckova konštanta a f zodpovedajúca frekvencia, takže ak $hf = pc$, potom vzťah

$$p = h \frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (15.3.3.5)$$

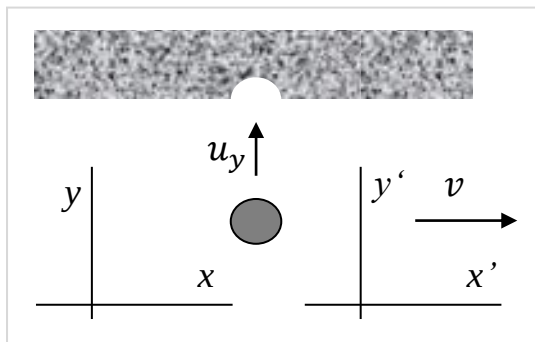
dáva do súvislosti hybnosť p fotónu a jemu zodpovedajúcu vlnovú dĺžku λ . Hybnosť je v klasickej fyzike definovaná ako súčin hmotnosti častice a jej rýchlosti. Fotón sa

pohybuje rýchlosťou svetla a tak jeho hybnosť sa pokúsime zapísať v tvare $m_f c$, kde m_f by malo predstavovať hmotnosť priradenú fotónu. Potom môžeme napísať vzťah

$$m_f c = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow m_f = \frac{h}{c\lambda} = \frac{hf}{c^2}. \quad (15.3.3.6)$$

Takto vypočítaná hmotnosť fotónu nie je fiktívna, lebo fotón interaguje s gravitačným poľom (jeho dráha sa v silnom gravitačnom poli zakrivuje) a má aj zotrvačné vlastnosti, ktoré sa prejavujú napríklad tlakom svetla.

Príklad 15.3.3.1



Guľka letiaca kolmo na rovinu steny uviazla v nej a vytvorila jamku. Situáciu posúdime z hľadiska dvoch vzťažných sústav. Vzhľadom na sústavu S nech je stena v pokoji, pričom os y nech je kolmá na rovinu steny. Zo sústavy S' , ktorá sa rýchlosťou v pohybuje rovnobežne s rovinou steny, sa doba preletu $\Delta t'$ guľky z východiskovej

polohy po stenu javí ako dlhšia v porovnaní s dobou Δt , pozorovanou v sústave S. Preto rýchlosť guľky je z hľadiska sústavy S' menšia. Hĺbka jamky sa však z pohľadu obidvoch sústav javí ako rovnaká ($y = y'$). Presvedčíme sa, že dôvodom je rovnaká hybnosť guľky z pohľadu uvedených dvoch sústav, a teda rovnaký je aj impulz odovzdaný stene.

Riešenie: Predpokladáme, že rýchlosť u_y guľky vzhľadom na sústavu S nie je relativistická, takže jej hmotnosť v sústave S je vlastne pokojovou hmotnosťou m_o . Preto hybnosť p guľky v tejto sústave je $p = m_o u_y$.

Vzhľadom na sústavu S' má guľka hmotnosť $m' = m_o / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ (vzťah 15.3.1.2), pritom rýchlosť $u'_y = u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}$ (dodatok D2), takže má hybnosť

$$p' = m' u'_y = \frac{\beta m_o u_y}{\beta} = m_o u_y = p.$$

Treba poznamenať, že hybnosti sú rovnaké len v smere osi y . Zatiaľ čo v smere osí x má guľka v sústave S rýchlosť nulovú, tak v sústave S' má rýchlosť v . Preto zložky hybnosti v tomto smere nie sú rovnaké.

15.4 Relativistická elektrodynamika

V predchádzajúcich článkoch sme sa mohli presvedčiť, aké zmeny do mechaniky prináša teória relativity, špeciálne Lorentzove transformácie. Zatiaľ čo podľa Galileiho transformácií sa zrýchlenie častice a teda ani Newtonov zákon sily prechodom do inej inerciálnej sústavy nemení (pozri 15.1.3.3), pri Lorentzových transformáciách to neplatí. Mení sa pri nich zrýchlenie, tým aj sila, a ani hmotnosť nie je invariantná. V elektrodynamike je to naopak – Lorentzove transformácie zachovávajú tvar Maxwellových rovníc, v ktorých je skoncentrovaná celá náuka o elektromagnetických poliach, čo však neplatí o Galileiho transformáciách.

Nasledujúci článok sa zaoberá Lorentzovými transformáciami veličín charakterizujúcich elektromagnetické pole. Výsledkom bude napríklad zdôvodnenie poznatku, že zatiaľ čo vo vlastnej inerciálnej sústave elektrický náboj vytvára iba elektrostatické pole, tak toto pole sa z inej, pohybujúcej sa sústavy javí zložitejšie, pozostáva aj z magnetického poľa. Ukáže sa, že elektrické a magnetické polia sú iba dvoma stránkami jedinej reality, závisiace od pohybu pozorovateľa vzhľadom na zdroje týchto polí.

15.4.1 Transformácia vektorov $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$.

V tomto článku budú odvodené transformačné vzťahy vektorov intenzity elektrického poľa $\mathbf{E}$ a magnetickej indukcie $\mathbf{B}$. Základnou požiadavkou pritom bude kovariantnosť Maxwellových rovníc, t.j. zachovanie ich tvaru pri transformácii do inej inerciálnej sústavy. Budeme vychádzať z Maxwellových rovníc opisujúcich elektromagnetické polia vo vákuu (článok 11.2.4 v zôšitku 11), ktoré majú takýto tvar:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Lorentzove transformácie, tak ako sú uvedené v článku 15.2.1, sú zapísané podľa jednotlivých súradníc, a ak ich chceme aplikovať na Maxwellove rovnice, tak aj tieto musíme rozpísať tak, aby v nich vystupovali derivácie podľa jednotlivých súradníc, nie iba značky div a rot . Po ich rozpísaní vznikne zo štyroch až osem rovníc. Z poslednej z uvedených Maxwellových rovníc získame tri rovnice:

$$(1) \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad (2) \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad (3) \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y},$$

ale z prvej uvedenej rovnice iba jednu, lebo je to v podstate skalárna rovnica (divergencia vektorovej funkcie poskytne skalárnu funkciu):

$$(4) \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

Zo zvyšných dvoch Maxwellových rovníc dostaneme ďalšie štyri skalárne rovnice:

$$(5) \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad (6) \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad (7) \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x},$$

$$(8) \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Ďalšou úlohou je transformácia týchto rovníc do „čiarkovanej“ inerciálnej sústavy, prostredníctvom Lorentzových transformácií. Vystupujú v nich parciálne derivácie, pri ktorých budeme súradnice vektorov $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ chápať ako zložené funkcie čiarkovaných a nečiarkovaných súradníc, čo zapíšeme v symbolickom tvare:

$$f = f[x'(x, y, z, t), y'(x, y, z, t), z'(x, y, z, t), t'(x, y, z, t)].$$

Úvaha o parciálnych deriváciách takejto funkcie s využitím Lorentzových transformácií (pozri dodatok D3) vedie k rovniciam (d) a (e):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \beta \frac{\partial f}{\partial x'} - \beta \frac{v}{c^2} \frac{\partial f}{\partial t'} \quad (d)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \beta \frac{\partial f}{\partial t'} - \beta v \frac{\partial f}{\partial x'}. \quad (e)$$

kde $\beta = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$. Tieto rovnice použijeme pri transformácii Maxwellových rovníc. Začneme rovnicou (1)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z},$$

do ktorej dosadíme príslušné parciálne derivácie:

$$\frac{1}{c^2} \beta \frac{\partial E_x}{\partial t'} - \beta \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial x'} = \frac{\partial B_z}{\partial y'} - \frac{\partial B_y}{\partial z'}. \quad (g)$$

Nebyť druhého člena na ľavej strane tejto rovnice, takmer by už mala rovnaký tvar v čiarkovanej sústave, ako v nečiarkovanej (keby sme ešte súradniciam vektorov $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$ pridali čiarky). Druhý člen nahradíme pomocou rovnice (4), ktorá po transformácii má tvar:

$$\beta \frac{\partial E_x}{\partial x'} - \beta \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t'} + \frac{\partial E_y}{\partial y'} + \frac{\partial E_z}{\partial z'} = 0. \quad (h)$$

Z rovnice (h) vypočítame výraz $\beta(\partial E_x/\partial x')$ a dosadíme do rovnice (g), a tak po krátkej úprave získame rovnicu

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial y'} \left[\beta \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z'} \left[\beta \left(B_y - \frac{v}{c^2} E_z \right) \right] \quad (15.4.1.1)$$

Táto rovnica má už fakticky zhodný tvar s rovnicou (1), pravda ak zapíšeme nasledujúce vzťahy:

$$E'_x = E_x, \quad B'_z = \left[\beta \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \right], \quad B'_y = \left[\beta \left(B_y - \frac{v}{c^2} E_z \right) \right],$$

ktoré považujeme za transformačné vzťahy súradníc vektorov $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$. Transformovaním ďalších Maxwellových rovníc získame nakoniec kompletný súbor transformačných vzťahov pre súradnice vektorov $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$:

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad E'_z = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (15.4.1.2)$$

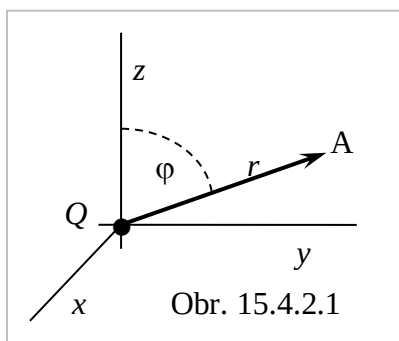
$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \frac{B_y + \frac{v}{c^2} E_z}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad B'_z = \frac{B_z - \frac{v}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (15.4.1.3)$$

Zo získaných vzťahov vidno, že ak napríklad v jednej inerciálnej sústave sa pozoruje iba elektrostatické pole (magnetické pole nulové, t.j. $B_x = B_y = B_z = 0$), v inej inerciálnej sústave sa pozorujú obidve polia. To má celkom racionálny dôvod. Ak tieto polia sú generované jediným elektrickým nábojom, tak v sústave, vzhľadom na ktorú je v pokoji, sa pozoruje iba elektrostatické pole. Vzhľadom na inú inerciálnu sústavu sa však náboj pohybuje rýchlosťou v , čím v tejto sústave vzniká elektrický prúd, ktorý vytvára aj magnetické pole. Zo vzťahov ďalej vyplýva, že guľovo symetrické elektrostatické pole v sústave, vzhľadom na ktorú je náboj v pokoji, sa z inej sústavy už javí inak, lebo zložka intenzity poľa v smere osi x sa nezmení, ale v smeroch osí y a z sa intenzita zväčší, čím sa guľová symetria poruší.

V nasledujúcom článku budú uvedené niektoré ďalšie dôsledky plynúce z týchto transformačných vzťahov.

15.4.2 Súvislosť Coulombovho a Biotovho-Savartovho zákona

V tomto článku sa presvedčíme, že ak je v sústave S elektrostatické pole nepohybujúceho sa náboja vyjadrené pomocou Coulombovho zákona, tak magnetické pole, vyvolané týmto nábojom v sústave S' , ktorá sa vzhľadom na náboj pohybuje rýchlosťou v , je v súlade s Biotovým-Savartovým zákonom.



Umiestnime elektrický náboj veľkosti Q do začiatku súradnicovej sústavy S . V tejto sústave náboj vytvára len elektrostatické pole. V bode A , ktorý je od začiatku sústavy vzdialený o r , a leží v rovine súradnicových osí y, z , určíme intenzitu tohto poľa. Vektor $\mathbf{E}$

intenzity elektrostatického poľa má v tomto bode súradnice

$$E_x = 0, \quad E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \sin \phi, \quad E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cos \phi. \quad (15.4.2.1)$$

Veľkosť vektora $\mathbf{E}$ v bode A je

$$|E| = \sqrt{(E_x)^2 + (E_y)^2 + (E_z)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

Z pohľadu sústavy S' , ktorá sa pohybuje v smere osi x rýchlosťou v , sa v bode A elektrostatické pole javí inak. Podľa transformačných vzťahov (15.4.1.2) má vektor $\mathbf{E}'$ takéto súradnice:

$$E'_x = E_x = 0, \quad E'_y = \beta E_y = \beta \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \sin \phi, \quad E'_z = \beta E_z = \beta \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cos \phi. \quad (15.4.2.2)$$

a ak vypočítame veľkosť vektora $\mathbf{E}'$, dostaneme výsledok

$$|E'| = \sqrt{(E'_x)^2 + (E'_y)^2 + (E'_z)^2} = \beta \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

To znamená, že vektory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{E}'$ nemajú rovnakú veľkosť, a ako už bolo uvedené vyššie, v sústave S' pole nie je guľovo symetrické.

Z pohľadu sústavy S' sa v bode A pozoruje aj magnetické pole, s takýmito súradnicami vektora magnetickej indukcie:

$$B'_x = 0, \quad B'_y = \beta \frac{v}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cos \phi = \beta \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \frac{v}{c^2} \cos \phi, \quad B'_z = -\beta \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \frac{v}{c^2} \sin \phi, \quad (15.4.2.3)$$

pričom sme použili vzťah $1/c^2 = \epsilon_0 \mu_0$ medzi rýchlosťou svetla c , elektrickou konštantou ϵ_0 a magnetickou konštantou μ_0 . Pre veľkosť vektora $\mathbf{B}'$ v bode A potom dostaneme

$$B' = \beta \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \frac{v}{c^2}, \quad (15.4.2.4)$$

čo je vzťah veľmi pripomínajúci Biotov–Savartov vzorec. Slúži na výpočet indukcie magnetického poľa v okolí pohybujúceho sa elektrického náboja, pričom pri bežných rýchlostiach nábojov, napríklad vo vodičoch elektrického prúdu, parameter β sa len zanedbateľne líši od hodnoty 1. Keď vynecháme tento parameter a namiesto náboja Q vo vzťahu napíšeme ΔQ , potom súčin vQ môžeme nasledovne upraviť:

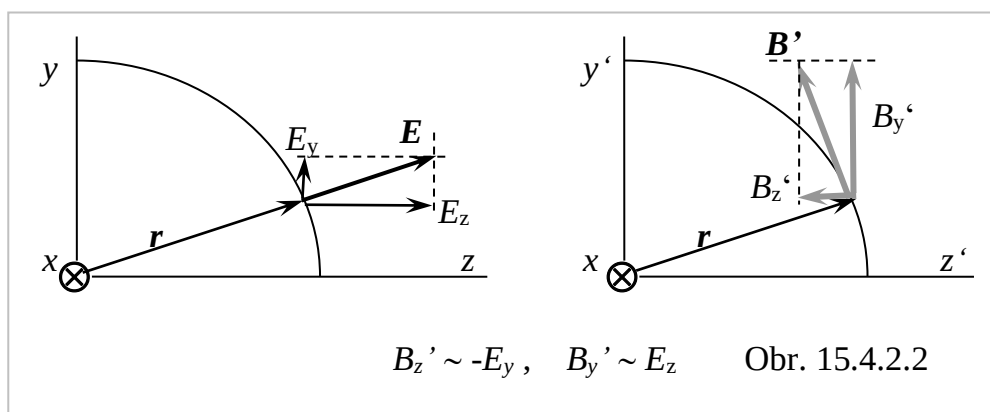
$$v \Delta Q = \frac{\Delta \ell}{\Delta t} \Delta Q = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Delta \ell = I \Delta \ell,$$

čo už je výraz vystupujúci v Biotovom – Savartovom vzťahu (vzťah 10.2.1.1 v kapitole o magnetickom poli)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell}{r^2} \sin \gamma.$$

Vzhľadom na špeciálnu polohu bodu A v uvažovanom prípade, $\sin \gamma = 1$, takže sme dospeli k zhode s Biotovým – Savartovým zákonom.

Podrobnejšie si ešte všimnime smer vektora $\mathbf{B}'$. Na obrázku je znázornená vzťažná sústava S , v rovine papiera ležia súradnicové osi y a z , os x smeruje za papier.



Zo vzťahov (15.4.2.2) a (15.4.2.3) vyplýva, že platia nasledujúce úmernosti týkajúce sa veľkosti súradníc vektorov $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}'$: $\square$

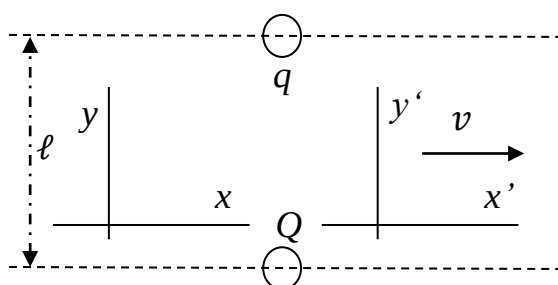
$$B_z' \sim E_y, \quad B_y' \sim E_z$$

ako je to znázornené aj na obrázku. Vektor $\mathbf{B}'$ má smer dotýčnice kružnice, tak ako v okolí priameho vodiča elektrického prúdu. Sústava S' sa pohybuje smerom za papier, takže (kladný) náboj, umiestnený v začiatku sústavy S , sa vzhľadom na sústavu S' pohybuje pred papier. S tým je v súlade aj smer vektora $\mathbf{B}'$, určený pravidlom pravej ruky.

Z výsledku vidno, že elektrostatické pole a magnetické pole sú vlastne len rôzne stránky jediného elektromagnetického poľa a že konkrétna vnímaná podoba závisí od vzájomného pohybu pozorovateľa a zdrojov tohto poľa, t.j. od elektrických nábojov. Súvislosť týchto polí umožňuje zaviesť tzv. štvorpotenciál – pozri nasledujúci článok.

Príklad 15.1.2

Dva kladné rovnako veľké náboje Q a q , sú vzdialené od seba o ℓ . Vzhľadom na sústavu S sú v pokoji, takže v tejto sústave pôsobí medzi nimi len elektrostatická odpudivá sila. Z pohľadu pohybujúcej sa sústavy S' náboje vytvárajú magnetické pole, preto sa medzi nimi pozoruje aj príťažlivé magnetické pôsobenie. Výsledná sila F' medzi nábojmi pôsobiaca v tejto sústave má preto inú veľkosť ako sila F pôsobiaca v sústave S . Presvedčíme sa, že veľkosť impulzov je pritom rovnaká, tj. že platí vzťah $F\Delta t = F'\Delta t'$.



Riešenie:

Sila F pôsobiaca na náboj q posudzovaná z hľadiska sústavy S je čisto elektrostatická:

$$F = qE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{\ell^2}, \Rightarrow E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\ell^2}$$

Pri výpočte sily z hľadiska sústavy S' treba využiť transformačné vzťahy (15.4.1.2) a (15.4.1.3) pre vektory intenzity elektrického poľa a indukcie magnetického poľa:

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \beta(E_y - vB_z), \quad E'_z = \beta(E_z + vB_y),$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \beta\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), \quad B'_z = \beta\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)$$

pričom $E_x = E_z = 0$, $B_x = B_y = B_z = 0$. (Os z v pravotočivej sústave smeruje pred papier). Elektrostatická (odpudivá) sila pôsobiaca na náboj q má v sústave S' veľkosť

$$F'_e = qE'_y = \beta qE_y = \beta \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{\ell^2},$$

Magnetická príťažlivá sila pôsobiaca na náboj q je vyvolaná magnetickým poľom, ktoré vzniklo pohybom náboja Q v smere vektora v . Podľa transformačného vzťahu vektor magnetickej indukcie má veľkosť (podľa pravidla pravej ruky má v mieste náboja q len zložku v smere osi z)

$$B'_z = -\beta \frac{v}{c^2} E_y.$$

Na náboj q pohybujúci sa rýchlosťou v potom pôsobí magnetická sila (vzťah 10.1.1.1)

$$F'_m = qvB'_z = -\beta \frac{v^2}{c^2} qE_y.$$

Výsledná sila z pohľadu sústavy S' :

$$F' = \beta qE_y - \beta \frac{v^2}{c^2} qE_y = \beta qE_y \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{\beta} qE_y.$$

Výsledná sila je teda menšia ($\beta > 1$), ale súčin sily a časového intervalu, t.j. impulz sily, je rovnaký, lebo časový interval pôsobenia sily z pohľadu sústavy S' je dlhší:

$$F'\Delta t' = \frac{1}{\beta} qE_y \beta \Delta t = qE_y \Delta t = F \Delta t.$$

15.4.3 Invariantnosť elektrického náboja

Invariantnosť náboja znamená, že sa z každej inerciálnej sústavy javí ako rovnako veľký, čiže vzhľadom na Lorentzove transformácie je invariantný. Dôkaz invariantnosti vychádza z rovnice kontinuity, ktorú upravíme tak, aby v nej namiesto vektora prúdovej hustoty vystupoval štvorvektor prúdovej hustoty. Rovnica kontinuity sa v klasickej elektrodynamike zapisuje v tvare

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

kde ρ je objemová hustota elektrického náboja (vyjadrená ako funkcia priestorových súradníc), $\mathbf{u}$ vektor rýchlosti pohybujúcich sa nábojov vzhľadom na zvolenú súradnicovú sústavu a t je čas. Keď divergenciu rozpíšeme podľa súradníc, dostaneme rovnicu

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Do posledného člena – do čitateľa i do menovateľa – doplníme výraz ic , kde i je imaginárna jednotka a c rýchlosť svetla, a tak dostaneme výraz, ktorý pripomína štvorvektor. V menovateli štvrtého člena sa objaví štvrtá súradnica polohového vektora bodovej udalosti $x_4 = ict$, pričom v ostatných troch členoch priestorové súradnice $x_1 \equiv x$, atď. Rovnica kontinuity tak nadobudne tvar

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial x_3} + \frac{\partial(ic\rho)}{\partial x_4} = 0, \quad (15.4.3.1)$$

čo nás nabáda k zavedeniu štvorvektora prúdovej hustoty, so súradnicami

$$J_1 = \rho u_x, \quad J_2 = \rho u_y, \quad J_3 = \rho u_z, \quad J_4 = ic\rho. \quad (15.4.3.2)$$

Ak sa v sústave S náboje nepohybujú, vektor ich rýchlostí $\mathbf{u}$ je nulový a nule sa rovnajú všetky jeho súradnice. Preto aj tri súradnice štvorvektora prúdovej hustoty sa rovnajú nule, zostane iba jeho štvrtá súradnica $J_4 = ic\rho$. Vzhľadom na inú inerciálnu sústavu S' , sa však náboje pohybujú. Všetky súradnice štvorvektora prúdovej hustoty v tejto sústave získame pomocou transformačných vzťahov (15.2.6.5) platných pre štvorvektory, v ktorých v je vzájomná rýchlosť sústav. Pre prehľadnosť ich tu znova uvedieme:

$$x'_1 = \beta \left(x_1 + i \frac{v}{c} x_4 \right), \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad x'_4 = \beta \left(x_4 - i \frac{v}{c} x_1 \right),$$

$$\text{kde } \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Na ich základe môžeme napísať súradnice vektora prúdovej hustoty v sústave S' :

$$J'_1 = \beta i \frac{v}{c} (ic\rho) = -\beta\rho v = -\frac{\rho v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad J'_2 = 0, \quad J'_3 = 0, \quad J'_4 = \frac{ic\rho}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (15.4.3.3)$$

Štvorvektor prúdovej hustoty má mať v čiarkovanej sústave analogický tvar ako v sústave S , takže $J'_4 = ic\rho'$; potom z porovnania vzťahov (15.4.3.3) a (15.4.3.2) vyplýva,

$$\rho' = \frac{\rho}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (15.4.3.4)$$

Z tohto vzťahu vidíme, že objemová hustota elektrického náboja je najmenšia v tej sústave, vzhľadom na ktorú sú náboje v pokoji.

Teraz vypočítame, ako sa pri tejto transformácii zmení veľkosť náboja, nachádzajúceho sa napr. v malom objeme $dV = dx dy dz$. Náboj prítomný v tomto objeme má veľkosť

$$dQ = \rho dV.$$

Po transformácii do čiarkovanej sústavy, vzhľadom na kontrakciu dĺžky v smere osi x , dostaneme náboj

$$\begin{aligned} dQ' &= \rho' dV' = \rho' dx' dy' dz' = \frac{\rho}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left[\sqrt{1 - (v/c)^2} dx \right] dy dz = \rho dx dy dz \\ &= \rho dV = dQ . \end{aligned}$$

To znamená, že veľkosť náboja sa zachovala $\Rightarrow$ elektrický náboj je invariantný, t.j. vzhľadom na všetky inerciálne sústavy rovnaký.

Ďalším zo štvorvektorov, ktorý tiež dokumentuje jednotu elektrických a magnetických javov, je štvorpotenciál,. Tri z jeho štyroch súradníc súvisia s vektorovým potenciálom $\mathbf{A}(A_x, A_y, A_z)$, ktorý bol zavedený vzťahom (10.2.5.5) v zošitku o magnetickom poli, štvrtá súvisí s elektrostatickým potenciálom φ , zavedeným podľa vzťahu (8.1.5.1) v zošitku o elektrostatickom poli. Súradnice štvorpotenciálu vyzerajú takto:

$$A_1 = A_x, \quad A_2 = A_y, \quad A_3 = A_z, \quad A_4 = i\varphi .$$

Využitím transformačných vzťahov (15.2.4.6) pre štvorvektory dostaneme:

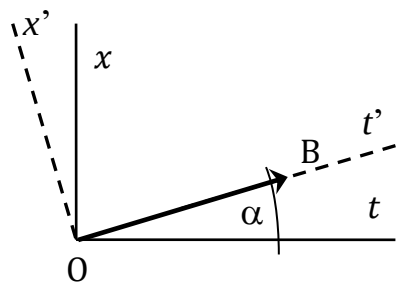
$$A'_1 = \beta \left(A_1 + i \frac{v}{c} A_4 \right), \quad A'_2 = A_2, \quad A'_3 = A_3, \quad A'_4 = \beta \left(A_4 - i \frac{v}{c} A_1 \right).$$

z ktorých opäť vidno ako sa „mieša“ elektrické pole s magnetickým, že hodnotenie elektromagnetického poľa závisí od vzťažnej sústavy, z ktorej pole posudzujeme.

Treba ešte spomenúť silu pôsobiacu na pohybujúci sa elektrický náboj v elektromagnetickom poli. Ak v istej inerciálnej vzťažnej sústave je sila vyjadrená Lorentzovým vzťahom $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, tak hľadiska inej inerciálnej sústavy má tvar $\mathbf{F}' = q(\mathbf{E}' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}')$, kde si treba všimnúť, že bez čiarky je len náboj, ktorého veľkosť sa transformáciou nemení.

Grafické znázornenie dvoch inerciálnych súradnicových sústav

V článku 15.2.1 v súvislosti s odvodením Lorentzových transformácií je použitá dvojrozmerná súradnicová sústava s jednou osou priestorovou (osou x) a jednou časovou, ako je to aj na tomto obrázku. Pri takomto zobrazení sa poloha častice na osi x v danom časovom okamihu t zobrazuje ako bod na ploche určenej osami x, t , ktoré nech reprezentujú sústavu S . Pohyb častice pozdĺž osi x v závislosti od času sa zobrazí ako čiara, pri pohybe stálou rýchlosťou v ako priamka. Na obrázku je hrubšou úsečkou so šípkou znázornený takýto pohyb z bodu O do bodu B .



Ako sa v takejto rovine dá zobraziť sústava S' , vzhľadom na ktorú je častica v pokoji? Takáto sústava s osami x', t' , ktorá sa vzhľadom na sústavu S pohybuje spolu s časticou rýchlosťou v , je znázornená čiarkovanými priamkami, pričom príslušné osi (t a t' , resp. x a x') zvierajú navzájom uhol α . Z pohľadu sústavy S' sa súradnica x' bodu nemení, ale času pribúda, takže priebeh tohto „deja“ sa v sústave S' javí ako pohyb bodu len po časovej osi sústavy. Pritom časová os sústavy S' je totožná s priamkou zobrazujúcou pohyb bodu v sústave S .

Uhol α sa v sústave S dá vypočítať z geometrie obrázku pomocou funkcie tangens a súradníc bodu $B(t_B, x_B)$:

$$\operatorname{tg} \alpha = (x_B/t_B),$$

pričom zjavne $x_B/t_B = v$ je rýchlosť častice, a teda aj vzájomná rýchlosť sústav S a S' . To teda znamená, že súradnicové osi inerciálnej sústavy S' , ktorá sa vzhľadom na sústavu S pohybuje rýchlosťou v pozdĺž osi x sa zobrazia ako pootočené o uhol, pre ktorý platí $\operatorname{tg} \alpha = v$. (Ale osi x a x' príslušných karteziánskych sústav ležia v jednej priamke!)

Geometricky je výpočet v poriadku, ale zatiaľ čo rýchlosť sa meria napríklad v metroch za sekundu, tak funkcia tangens je bezrozmerná. Situácia sa dá napraviť tak, že časová súradnica sa vynásobí konštantou s rozmerom m/s. Tak vznikne veličina s rozmerom dĺžky (sekunda sa vykrátí), teda rovnakým ako pri osi x . Je výhodné za túto konštantu zvoliť rýchlosť svetla, lebo je to univerzálna konštanta, rovnaká vo všetkých vzťahných sústavách. Toto sa využíva aj pri zavádzaní tzv. štvorvektorov, kde k trom priestorovým súradniciam sa pridáva štvrtá – časová súradnica vynásobená rýchlosťou svetla. Na graf možno nanášať veličiny v ľubovoľne zvolenej mierke takže veľká rýchlosť svetla nie je na prekážku.

D2

Transformácia zložky rýchlosti kolmej na os x .

Ak sa častica pohybuje len v smere kolmom na os x , napríklad v smere osi y sústavy S , tak sa jej rýchlosť u'_y v sústave S' javí ako menšia v porovnaní s veľkosťou rýchlosti u_y vzhľadom na sústavu S . Pri takomto pohybe $y' \equiv y$, $x_2 = x_1$:

$$u'_y = \frac{y'_2 - y'_1}{t'_2 - t'_1} = \frac{y_2 - y_1}{\frac{(t_2 - x_2(v/c^2))}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - \frac{(t_1 - x_1(v/c^2))}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}} \Rightarrow$$

$$u'_y = \frac{(y_2 - y_1)\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}{(t_2 - t_1) - (x_2 - x_1)(v/c^2)} = \frac{(y_2 - y_1)\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}{(t_2 - t_1)} \Rightarrow$$

$$u'_y = u_y \sqrt{1 - (v^2/c^2)},$$

$$\Rightarrow u'_y < u_y.$$

D3

Poznámka k transformácii Maxwellových rovníc

Pri transformácii veličín elektromagnetického poľa treba chápať súradnice vektorov $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ ako zložené funkcie čiarkovaných a nečiarkovaných súradníc, čo zapíšeme v tvare:

$$f = f[x'(x, y, z, t), y'(x, y, z, t), z'(x, y, z, t), t'(x, y, z, t)].$$

Parciálnu deriváciu podľa premennej x vyjadríme takto:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x}, \quad (a)$$

a analogicky vyzerajú aj parciálne derivácie podľa premenných y a z . Derivácia podľa premennej t :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}. \quad (b)$$

Vzhľadom na Lorentzove transformácie (vzťahy 15.2.1.6, $\beta = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$)

$$x' = \beta(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \quad (c)$$

premenné x' a t' závisia len od premenných x , t , pričom premenné y' a z' od nich nezávisia. Preto platí

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\partial z'}{\partial t} = 0,$$

Ďalej platí

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \beta, \quad \frac{\partial x'}{\partial t} = -\beta v, \quad \frac{\partial t'}{\partial x} = -\beta \frac{v}{c^2}, \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = \beta.$$

Po dosadení do vzťahov (a) a (b) tak dostaneme pre parciálne derivácie podľa x a podľa t :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \beta \frac{\partial f}{\partial x'} - \beta \frac{v}{c^2} \frac{\partial f}{\partial t'} \quad (d)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \beta \frac{\partial f}{\partial t'} - \beta v \frac{\partial f}{\partial x'}. \quad (e)$$

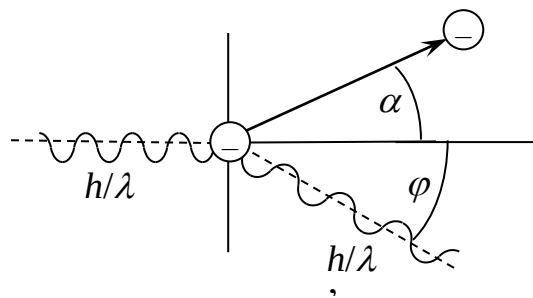
D4

Comptonov jav

Ide o zmenu frekvencie prislúchajúcej fotónu, ku ktorej dochádza pri zrážke s voľným elektrónom. Fotón odovzdá elektrónu časť svojej energie aj časť hybnosti, a keďže sa jeho rýchlosť nemôže zmenšiť, strata energie sa prejaví zmenšením frekvencie f , resp. zväčšením vlnovej dĺžky λ . Fotón sa v dôsledku zrážky odchýli od pôvodného smeru o istý uhol φ , elektrón získa kinetickú energiu a začne sa pohybovať.

Jav sa nedá exaktne vysvetliť na základe klasickej fyziky. Energii fotónu treba vyjadriť kvantovo ako súčin hf Planckovej konštanty h a frekvencie f príslušnej vlny, a kinetickú energiu elektrónu relativistickým vzťahom $(m - m_0)c^2$, kde m je hmotnosť elektrónu po zrážke a m_0 pred zrážkou (pokojoová hmotnosť). Výpočet je založený na aplikácii zákonov zachovania energie a hybnosti sústavy fotón – elektrón, tj. energia, ani hybnosť sústavy ako celku sa pri zrážke nezmenia.

Vychádza sa z predpokladu, že pred zrážkou mal elektrón nulovú kinetickú energiu aj



nulovú hybnosť, fotón energiu hf a hybnosť $hf/c = h/\lambda$.

Zachovanie energie sa vyjadruje vzťahom:

$$hf = hf' + (mc^2 - m_0c^2)$$

a zachovanie hybnosti (vektorovej veličiny) sa vyjadruje dvoma rovnicami v smere priamky

prilietavajúceho fotónu a v smere naň kolmom:

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos \varphi + mv \cos \varphi$$

$$0 = \frac{h}{\lambda'} \sin \varphi - mv \sin \alpha.$$

Na základe uvedených rovníc sa získa zmena vlnovej dĺžky prislúchajúcej fotónu:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi) ,$$

kde $h/(m_0 c) = 2,42 \times 10^{-12} \text{m}$ je tzv. Comptonova vlnová dĺžka. Zmena vlnovej dĺžky nezávisí od energie fotónu, teda od frekvencie resp. vlnovej dĺžky, ale len od uhla φ .

Jav pozoroval a opísal A. Compton v roku 1923.

SÚHRN VZŤAHOV

Lorentzove transformácie $S \rightarrow S'$	$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad y' = y, \quad z' = z$ $t' = \frac{t - x(v/c^2)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$
Lorentzove transformácie $S' \rightarrow S$	$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad y = y', \quad z = z'$ $t = \frac{t' + x'(v/c^2)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$
kontrakcia dĺžok	$\ell = \ell' \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$
dilatácia času	$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$
transformácia rýchlosti	$u'_x = \frac{u_x - v}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \quad u_x = \frac{u'_x + v}{\left(1 - \frac{u'_x v}{c^2}\right)}$ $u'_y = u_y \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ $u'_z = u_z \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$
štvorvektor polohy	$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict$
transformačné vzťahy pre štvorvektory $S \rightarrow S'$	$x'_1 = \beta \left(x_1 + i \frac{v}{c} x_4 \right), \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3,$ $x'_4 = \beta \left(x_4 - i \frac{v}{c} x_1 \right)$
štvorvektor rýchlosti	$u_1 = \beta u_x, \quad u_2 = \beta u_y, \quad u_3 = \beta u_z, \quad u_4 = \beta ic$ $\beta = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$
závislosť hmotnosti od rýchlosti	$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \beta m_o$
Ekvivalencia hmotnosti a energie	$E = mc^2$
Kinetická energia – relativistický vzorec	$E_k = mc^2 - m_o c^2$

Súvislosť energie E a hybnosti p	$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$
štvorvektor hybnosti	$p_1 = m_0 u_1, \quad p_2 = m_0 u_2, \quad p_3 = m_0 u_3,$ $p_4 = m_0 u_4 = m_0 \beta i c = m i c = i \frac{E}{c}$
štvorvektor sily – derivácia hybnosti podľa vlastného času $d\tau$	$F_\alpha = dp_\alpha / d\tau$
transformácie intenzity elektrického poľa	$E'_x = E_x, \quad E'_y = \frac{E_y - v B_z}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$ $E'_z = \frac{E_z + v B_y}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$
transformácie magnetickej indukcie	$B'_x = B_x, \quad B'_y = \frac{B_y + \frac{v}{c^2} E_z}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$ $B'_z = \frac{B_z - \frac{v}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$
štvorvektor prúdovej hustoty	$J_1 = \rho u_x, \quad J_2 = \rho u_y, \quad J_3 = \rho u_z, \quad J_4 = i c \rho$
transformácia hustoty elektrického náboja	$\rho' = \frac{\rho}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$
štvorpotenciál	$A_1 = A_x, \quad A_2 = A_y, \quad A_3 = A_z, \quad A_4 = i \varphi$

SLOVNÍK

bodová udalosť – pomenovanie bodu v časopriestore, reprezentujúceho extrémne krátku udalosť (napr. záblesk), ktorá sa v danej inerciálnej sústave udiala v mieste so súradnicami x, y, z a v časovom okamihu t .

časopriestor – štvorrozmerný priestor používaný v teórii relativity, ktorého tri rozmery zodpovedajú normálnemu priestoru a štvrtý rozmer času t . Bodu v časopriestore sú priradené súradnice $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict$, kde i je imaginárna jednotka a c rýchlosť svetla.

dilatácia času – predĺženie časového intervalu medzi dvoma udalosťami z hľadiska pozorovateľa, súvisiace s rýchlosťou jeho pohybu. Najkratší časový interval nameria pozorovateľ viazaný na takú inerciálnu sústavu, v ktorej sa pozorované udalosti udiali na tom istom mieste.

Einsteinove postuláty – dva postuláty, na ktorých je vybudovaná špeciálna teória relativity:

- postulát o rovnocennosti všetkých inerciálnych vzťažných sústav (žiadna z nich nemôže byť uprednostnená)
- postulát o nezávislosti rýchlosti svetla nameranej pozorovateľom (vo vákuu) od jeho rýchlosti vzhľadom na zdroj svetla.

ekvivalencia hmotnosti a energie – najvýznamnejší výsledok špeciálnej teórie relativity, vyjadrený vzťahom $E = mc^2$, v ktorom E je celková energia častice, m jej hmotnosť a c rýchlosť svetla. Objektu, ktorý v inerciálnej sústave má hmotnosť m , súčasne prislúcha celková energia E .

Galileiho princíp relativity, klasický princíp relativity – princíp, podľa ktorého mechanickými pokusmi uskutočňovanými v inerciálnej sústave, nie je možné zistiť, či sa vzťažná sústava pohybuje, alebo či je v pokoji.

Galileiho transformácie – transformácie polohových súradníc medzi dvoma inerciálnymi vzťažnými sústavami, opierajúce sa o nezávislosť času od pohybu vzťažnej sústavy, tj. využívajúce absolútny čas. V prípade, že súradnicové osi sústav sú vzájomne rovnobežné a vzájomný pohyb sústav sa deje pozdĺž osí x majú tvar:

$x' = x - vt, y' = y, z' = z$, kde v je vzájomná rýchlosť sústav.

interval – relativisticky invariantná veličina s , zavedená vzťahom

$s^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 - c^2(t_A - t_B)^2$, v ktorom $x_A, y_A, \dots$ sú súradnice jednej bodovej udalosti a $x_B, y_B, \dots$ sú súradnice druhej bodovej udalosti a c rýchlosť svetla. Je analógiou vzdialenosti medzi dvoma bodmi v trojrozmernom priestore aj tým, že transformáciou do inej inerciálnej sústavy sa jeho hodnota nemení, tak ako sa nemení dĺžka vektora pri otočení súradnicovej sústavy.

invariantná fyzikálna veličina (invariant) – veličina, ktorá má vo všetkých inerciálnych vzťažných sústavách rovnakú hodnotu, t.j. pri transformácii veličiny do inej sústavy sa jej hodnota nemení; takou veličinou je napríklad elektrický náboj.

invariantnosť (kovariantnosť) **fyzikálneho zákona** – nemennosť formy zápisu zákona pri prechode do inej inerciálnej vzťažnej sústavy.

kontrakcia dĺžky – skrátenie rozmerov objektu z hľadiska pozorovateľa, závisiace od rýchlosti, ktorou sa pohybuje vzhľadom na pozorovaný objekt. Najväčšiu dĺžku nameria ten pozorovateľ, vzhľadom na ktorého je objekt v pokoji.

Lorentzove transformácie – transformácie polohových súradníc a času, ktoré sú – na rozdiel od Galileiho transformácií – v súlade s Einsteinovými postulátmi. Vyplyvajú z nich dôsledky odporujúce klasickým predstavám, ako napr. závislosť dĺžky a časového intervalu od rýchlosti pozorovateľa, alebo relatívnosť súčasnosti dvoch udalostí.

Michelsonov – Morleyov pokus – jeden z pokusov, ktorým sa mal zistiť pohyb Zeme voči éteru. Využíval Michelsonov interferometer a mal overiť predpokladanú odlišnosť časových intervalov potrebných na prechod svetla dvoma navzájom kolmými ramenami interferometra – rovnobežným so smerom pohybu Zeme okolo Slnka a naň kolmým. Výsledok pokusu bol negatívny.

pokojová energia – energia častice v tej inerciálnej sústave, vzhľadom na ktorú sa nepohybuje. S pokojovou hmotnosťou m_o súvisí vzťahom $E_o = m_o c^2$, kde c je rýchlosť svetla.

pokojová hmotnosť, vlastná hmotnosť (m_o) – hmotnosť častice v tej inerciálnej sústave, vzhľadom na ktorú sa nepohybuje. Častici pohybujúcej sa rýchlosťou u sa prisudzuje **relativistická hmotnosť**:

$$m = m_o / \sqrt{1 - (u/c)^2}.$$

relativistická častica – častica, ktorá sa pohybuje rýchlosťou, ktorá je blízka

rýchlosti svetla.
relativistická kinetická energia – rozdiel celkovej a pokojovej energie častice: $E_k = mc^2 - m_0c^2$
relativistická mechanika – mechanika častíc, ktoré sa pohybujú rýchlosťami, ktoré už nie sú zanedbateľné vzhľadom na rýchlosť svetla.
relativistická rýchlosť – rýchlosť, ktorá vzhľadom na rýchlosť svetla už nie je zanedbateľná; prejavujú sa pri nej relativistické efekty, ako zväčšenie hmotnosti častice, dilatácia času a pod.
relativistické skladanie rýchlostí – skladanie, ktoré vyplýva z Lorentzových transformačných vzťahov, podľa ktorého veľkosť súčtu dvoch rýchlostí nemôže presiahnuť rýchlosť svetla ani v prípade, keby sa skladali dve rýchlosti blízke rýchlosti svetla. Takéto skladanie rýchlostí nie je v súlade s klasickým, podľa ktorého sa výsledná rýchlosť rovná súčtu dvoch rýchlostí $v_1 + v_2$.
relatívnosť súčasnosti udalostí – nezhoda pozorovateľov viazaných na rôzne inerciálne sústavy v tvrdení o súčasnosti dvoch udalostí. Udalosti, ktoré sa odohrali v niektorej inerciálnej sústave na dvoch rôznych miestach súčasne, sa z iných inerciálnych sústav ako súčasné nejavia.
svetelný éter – hypotetické prostredie, o ktorom sa predpokladalo, že sa ním šíri elektromagnetické vlnenie. Jeho existenciu sa experimentálne nepodarilo dokázať (→ Michelsonov – Morleyov pokus).
špeciálna teória relativity – teória týkajúca sa inerciálnych vzťahných sústav, opierajúca sa o dva postuláty – postulát rovnocennosti všetkých inerciálnych vzťahných sústav a postulát rovnakej rýchlosti svetla vo všetkých inerciálnych sústavách. Jej najvýznamnejším výsledkom je ekvivalencia hmotnosti m a energie E , vyjadrená vzťahom $E = mc^2$, kde c je rýchlosť svetla (vo vákuu).
štvorpotenciál – štvorvektor, ktorého prvé tri súradnice súvisia s vektorovým potenciálom magnetického poľa a štvrtá súradnica so skalárnym potenciálom elektrostatického poľa.
štvorvektor – súbor štyroch rovnakých fyzikálnych veličín x_1, x_2, x_3, x_4 , (súradníc štvorvektora v časopriestore), ktoré sa do inej inerciálnej súradnicovej sústavy transformujú pomocou Lorentzových transformácií –

napr. štvorvektor polohy, štvorvektor rýchlosti, štvorvektor sily a pod.
štvorvektor hybnosti – štvorvektor, ktorého súradnice sú vytvorené súčinom pokojovej hmotnosti pohybujúceho sa telesa s príslušnými súradnicami štvorvektora rýchlosti.
štvorvektor polohy – štvorvektor, ktorého súradnicami sú súradnice bodovej udalosti.
štvorvektor rýchlosti – štvorvektor, ktorého súradnicami sú derivácie súradníc štvorvektora polohy podľa vlastného času.
vlastná dĺžka – dĺžka predmetu určená v inerciálnej vzťažnej sústave, vzhľadom na ktorú je predmet v pokoji; z ľubovoľnej inej vzťažnej sústavy, sa tento predmet javí ako kratší; spomedzi dĺžok nameraných z rôznych inerciálnych sústav, je teda maximálna.
vlastný čas – čas, ktorý ukazujú hodiny, ktoré sa vzhľadom na danú inerciálnu sústavu nepohybujú, t.j. čas, ktorý nie je importovaný z inej vzťažnej sústavy. Pri pozorovaní zo vzťažných sústav, ktoré sa vzhľadom na hodiny pohybujú, sa hodiny oneskorujú v porovnaní s rovnakými hodinami umiestnenými v týchto sústavách.
všeobecná teória relativity – teória rozširujúca rovnocennosť aj na neinerciálne vzťažné sústavy a postulujúca lokálnu nerozlíšiteľnosť zrýchlenia podmieneného neinerciálnosťou vzťažnej sústavy od pôsobenia gravitačného poľa. Podľa všeobecnej teórie relativity je priestor v okolí telies zakrivený. Predstavuje všeobecnejšiu teóriu gravitácie než Newtonova gravitačná teória.

ÚLOHY

Odporúčané hodnoty konštánt:

rýchlosť svetla $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$,

veľkosť náboja elektrónu aj protónu $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ As}$,

hmotnosť elektrónu $m_e = 0,91 \times 10^{-30} \text{ kg}$,

hmotnosť protónu $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$

1. Je v súlade s teóriou relativity predstava o guľi, s polomerom $r = 1 \text{ m}$, ktorá sa otáča okolo svojej osi symetrie uhlovou rýchlosťou $\omega = 3,30 \times 10^8 \text{ rad/s}$?

Výsledok: nie je, lebo jej obvodová rýchlosť by bola väčšia než rýchlosť svetla

2. Pozorovateľ v sústave S pripísal bodovej udalosti polohové súradnice $x = 10^4 \text{ m}$, $t = 2 \times 10^{-4} \text{ s}$. Aké sú súradnice x', t' tejto udalosti v sústave S' , ktorá sa od S vzdďaľuje v kladnom smere osi x rýchlosťou $v = 0,8 c$, keď v čase $t = t' = 0$ boli začiatky sústav v jednom bode.

Výsledok: $x' = -6,33 \times 10^4 \text{ m}$, $t' = 2,89 \times 10^{-4} \text{ s}$.

3. V sústave S blikli dve žiarovky, jedna v mieste $x_1 = 0$ a čase $t_1 = 0$, druhá v mieste $x_2 = 10^4 \text{ m}$ a čase $t_2 = 3 \times 10^{-6} \text{ s}$. Akou rýchlosťou v by sa musela pohybovať sústava S' , aby pozorovateľ v nej zaznamenal bliknutia ako súčasné?

Výsledok: $v \cong 0,09 c$.

4. Častica v našej inerciálnej sústave preletela vzdialenosť $d = 1,5 \times 10^8 \text{ m}$ za jednu sekundu. Koľko by sme odčítali na hodinách pohybujúcich sa spolu s časticou?

Výsledok: $\Delta t = 0,866 \text{ s}$, lebo z nášho pohľadu idú jej hodiny pomalšie, takže ukážu menej; vzdialenosť je z pohľadu častice kratšia, takže ju prejde rýchlejšie.

5. Rýchlosť, ktorou sa v smere osí x navzájom vzdďaľujú inerciálne sústavy S a S' je $v = 0,6 c$. Pohybujúca sa častica má v sústave S všetky tri zložky rýchlosti rovnaké: $u_x = u_y = u_z = 0,2 c$. Vypočítajte veľkosť rýchlosti, aká bude nameraná v oboch týchto sústavách. Treba vziať do úvahy dve možnosti – a) keď sa častica aj sústava S' vzhľadom na S pohybujú rovnakým smerom, b) keď sa pohybujú opačnými smermi.

Výsledok: a) $0,535 \cdot c$, b) $0,763 \cdot c$

6. Akou rýchlosťou u by sa museli pohybovať hodiny, aby sa vzhľadom na našu inerciálnu sústavu omeškali za 24 hodín o jednu sekundu?

Výsledok: $u \approx 1500 \text{ km/s}$.

7. Častica pohybujúca sa rýchlosťou $0,99 \cdot c$ prebehla v detektore od svojho vzniku po rozpad vzdialenosť 1 cm . Aká je doba jej života vzhľadom na detektor (Δt_1) a aká v sústave viazanej na časticu (Δt_2)?

Výsledok: $\Delta t_1 = 3,367 \times 10^{-11} \text{ s}$, $\Delta t_2 = 0,475 \times 10^{-11} \text{ s}$.

8. Tyč, ktorá má v sústave S' dĺžku l' , zvierá s osou x' uhol 30° ; vzhľadom na sústavu S sa pohybuje rýchlosťou $0,8 \cdot c$. Aká je jej dĺžka l v sústave S ?

Výsledok: $l = 0,78 l'$.

9. Elektrón preletel rýchlosťou $0,9 \cdot c$ cez vákuovú trubicu dlhú $l = 2\text{m}$; koľko mu to trvalo vzhľadom na sústavu viazanú na trubicu (Δt_1) a koľko v jeho vlastnej sústave (Δt_2)? Aká je dĺžka trubice l' z pohľadu sústavy viazanej na elektrón?

Výsledok: $l' = 0,436 l = 0,872\text{ m}$; $\Delta t_1 = 7,4 \times 10^{-9}\text{s}$, $\Delta t_2 = 3,23 \times 10^{-9}\text{s}$.

10. Hodiny sa pohybovali pozdĺž osi x sústavy S rýchlosťou $v = 0,6 \cdot c$ a keď prelietali popri jej začiatku ($x_1 = 0$), ukazovali $t_1 = 0$. Koľko (t_2) ukazovali v polohe $x_2 = 10^6\text{ m}$?

Výsledok: $t_2 = 4,44 \times 10^{-2}\text{s}$

11. Dve galaxie sa od našej vzdďľujú opačnými smermi rýchlosťami $v = 0,6 c$. Aké rýchlosti nameria pozorovateľ nachádzajúci sa v jednej z nich pre rýchlosť našej u_1 a tej druhej u_2 galaxie?

Výsledok: $u_1 = 0,6 c$, $u_2 = 0,882 c$

12. Jedna z galaxií s priemerom 1000 ly (svetelných rokov) sa od nás vzdďľuje rýchlosťou $0,5 c$. Koľko bude z nášho pohľadu trvať (Δt_1), pőkým svetelný lúč preletí celý jej priemer, a koľko z hľadiska sústavy viazanej na galaxiu (Δt_2)?

Výsledok: $\Delta t_1 = 0,866 \times 1000\text{ rokov}$, $\Delta t_2 = 1000\text{ rokov}$

13. Vypočítajte rýchlosť elektrónu urýchleného napätím $U = 10\text{ kV}$ podľa klasickej (a) aj relativistickej (b) mechaniky. Po sformulovaní vzťahov vypočítajte v klasickom aj relativistickom prípade limitu pre $U \rightarrow \infty$.

Výsledok: a) $v = 5,9 \times 10^7\text{ m/s} = 0,197 \cdot c$ b) $v = 0,195 \cdot c$

Pre $U \rightarrow \infty$ podľa klasického výpočtu limitná hodnota rýchlosti rastie nad všetky medze, podľa relativistického výpočtu sa rovná rýchlosti svetla.

14. Vypočítajte rýchlosť elektrónu urýchleného napätím $U = 1\text{ MV}$, a to podľa klasickej (a) aj relativistickej (b) mechaniky.

Výsledok: a) $v = 5,9 \times 10^8\text{ m/s} = 1,97 \cdot c > c!!$ b) $v = 0,916 \cdot c$

15. Akým napätím U by sa podľa klasickej fyziky urýchlil elektrón na rýchlosť svetla? Akú rýchlosť u nadobudne pri takomto urýchlňujúcom napätí v skutočnosti?

Výsledok: $U = 2,56 \times 10^5\text{ V}$, $u = 0,745 \cdot c$

16. Koľkokrát sa zväčší pozorovaná hmotnosť elektrónu urýchleného napätím a) 10 kV , b) 1 MV ? Využite hodnoty rýchlostí z úloh 1a a 1b.

Výsledok: a) 1,012 – krát, b) 2,49 - krát

17. Vypočítajte rýchlosť u protónu, ktorý v urýchlňovači získal kinetickú energiu veľkosti 1 MeV . Počítajte podľa klasickej (a) aj relativistickej (b) mechaniky.

Výsledok: a) $u = 0,046 \cdot c$, b) $u = 0,0046 \cdot c$

18. Akou rýchlosťou u sa musí pohybovať častica, aby sme namerali jej hmotnosť ako dvojnásobnú?

Výsledok: $u = c \cdot \sqrt{3}/2 = 0,866 \cdot c$

19. Vyjadrite v kilowatthodinách ekvivalent energie jedného gramu hmoty !

Výsledok: $E = 9 \times 10^{13} \text{Ws} = 2,5 \times 10^7 \text{kWh}$

20. Aká je veľkosť rýchlosti častice v inerciálnej sústave, vzhľadom na ktorú má hmotnosť $m = 0,911 \times 10^{-30} \text{kg}$ a hybnosť $p = 1,58 \times 10^{-22} \text{kg} \cdot \text{m/s}$?

Výsledok: $u = 1,52 \times 10^8 \text{m/s}$.

21. Pri akej rýchlosti u sa veľkosť kinetickej energie častice rovná jej pokojovej hmotnosti vynásobenej druhou mocninou rýchlosti svetla?

Výsledok: $u = c \cdot \sqrt{3}/2 = 0,866 \cdot c$

22. Na urýchlenie častice s pokojovou hmotnosťou $m_0 = 0,91 \times 10^{-30} \text{kg}$ dodáme prácu W , ktorej veľkosť sa rovná jej pokojovej energii $m_0 c^2$. Akú bude mať kinetickú energiu E_k a aká bude jej rýchlosť u ?

Výsledok: $E_k = 8,19 \times 10^{-14} \text{Ws}$, $u = 0,866 \cdot c$

23. Akú veľkú prácu treba vykonať na urýchlenie elektrónu z pokoja na rýchlosti 0,5 c , 0,9 c a 0,999 c ?

Výsledok: $m_0 c^2 \cdot 0,15$, $m_0 c^2 \cdot 1,29$, $m_0 c^2 \cdot 21,4$; $m_0 c^2 = 8,19 \times 10^{-14} \text{Ws}$

24. Porovnajte, akú veľkú prácu A treba dodať na urýchlenie elektrónu a) z 0,1 c na 0,2 c b) z 0,8 c na 0,9 c ?

Výsledok: $W_{0,2} - W_{0,1} = 0,015 m_0 c^2$, $W_{0,9} - W_{0,8} = 0,613 m_0 c^2$

25. Kvazary (jadrá aktívnych galaxií na začiatku ich vývoja) vyžarujú energiu výkonom cca $P = 10^{41} \text{W}$. Koľko hmotnosti ubudne z kvazaru za jednu sekundu?

Výsledok: $\Delta m / \Delta t \cong 10^{24} \text{kg/s}$

Použité pramene

Beiser A.: Úvod do moderní fyziky, Academia, Praha 1975

Born M.: Einsteins theory of relativity, Dover Publications, New York 1962

Einstein A.: The Meaning of Relativity, Princeton 1953

Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika, VUTIM Brno 2007

Horák Z., Krupka F.: Fyzika, SNTL Alfa, Praha 1976

Saveljev I. V.: Kurs obšej fiziki, tom 1., Nauka, Moskva 1977