

Elektromagnetická indukcia



Úlohy

1. Overenie lineárnej závislosti indukovaného napätia pohybujúcej sa cievky a veľkosti rýchlosti.
2. Porovnanie veľkosti magnetickej indukcie magnetického poľa získaného vyhodnotením závislosti $U_i(v)$ s viacbodovým meraním teslametrom.

Historický úvod

Elektromagnetickú indukciu môžeme stručne charakterizovať ako vznik elektromotorickej sily vo vodiči, ktorý sa nachádza v časovo premenlivom magnetickom poli. Jej objav publikovali nezávisle od seba dvaja fyzici, angličan Michael Faraday v roku 1831 a američan Joseph Henry v roku 1832. Obaja formulovali zákon, ktorý dnes patrí k základom teórie elektromagnetického poľa a poznáme ho ako *Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie*.

Je súčasťou Maxwellových rovníc a matematicky ho zapisujeme v integrálnom (vľavo) alebo v diferenciálnom tvare (vpravo) nasledujúcim spôsobom:

$$\oint_{\delta S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Integrál s krúžkom na ľavej strane integrálnej rovnice predstavuje indukované napätie U_i v uzavretom vodivom závite. Plošný integrál na pravej strane je známy ako magnetický indukčný tok ϕ . Rovnica hovorí, že v uzavretom obvode sa indukuje elektromotorické napätie vplyvom časovej zmeny magnetického indukčného toku cez plochu S , ktorú obvod ohraničuje. Symbol δS má význam hraničnej čiary plochy S a krúžok na krivkovom integráli hovorí, že táto hranica je uzavretá krivka. Platnosť Faradayovho zákona nie je obmedzená iba na obvody, či uzavreté vodiče. Vzťah medzi priestorovým rozložením elektrického poľa a časovou zmenou magnetického poľa platí aj v miestach, kde nie sú prítomné voľné náboje, ani prúdy, dokonca je platný aj vo vákuu. Preto sa môžu zdať uvedené rovnice trochu komplikované.

Ak sa vrátíme späť k elektrickým vodičom, závitom, či cievkam, zapisujeme integrálny tvar zákona elektromagnetickej indukcie jednoduchšie:

$$U_i = -\frac{d\phi}{dt} \tag{1}$$

Bez akéhokolvek zveličovania môžeme tento vzťah pokladať za základ elektroenergetiky. V elektrárnach vyrábame elektromotorické napätie mechanickým rotačným pohybom magnetického poľa v blízkosti indukčných cievok alternátora. Mechanický pohyb zabezpečujú motorické sily: vodná para prúdiaca na lopatky turbíny, tečúca či padajúca voda alebo vietor, ktorý roztáča vrtuľu.

Metóda merania

V tomto laboratórnom cvičení budeme merať indukované napätie na koncoch cievky, ktorá sa pohybuje rovnomerným pohybom ponad sústavu permanentých magnetov (obrázok 1 vľavo). Magnety sú naukladané tesne vedľa seba a vytvárajú takmer homogénne magnetické pole s vektorom indukcie $\vec{B}$, ktorý je kolmý na plochu pohybujúcej sa obdĺžnikovej cievky.

Cievka sa začne pohybovať ešte mimo tohto poľa a indukované napätie nebudeme pozorovať. V momente, keď sa dostane do blízkosti prvého radu magnetov, zaznamenáme prudký nárast indukovaného napätia, ktoré bude chvíľu oscilovať okolo konkrétnej hodnoty. Ak bude celá cievka v magnetickom poli, indukované napätie sa opäť vráti na nulu, pretože magnetický indukčný tok cez plochu závitov cievky sa nemení. Len čo cievka začne opúšťať oblasť zaplnenú magnetmi, zaznamenáme nárast opačného indukovaného napätia až do okamihu, kedy cievka opustí priestor nad polom magnetov a výchylka ručičky voltmetra sa vráti na nulu. Tu je už magnetický indukčný tok nulový a ďalej sa nemení.

Pri analýze experimentu použijeme formuláciu Faradayovho zákona elektromagnetickej indukcie (1), ktorá dáva do súvisu indukované napätie U_i v uzavretej vodivej slučke a časovú zmenu magnetického indukčného toku ϕ cez plochu ohraničenú slučkou, pričom magnetický indukčný tok cez plochu cievky závisí aj od počtu závitov cievky N :

$$\phi = N \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2)$$

V prípade homogénneho magnetického poľa $\vec{B}$ a cievky orientovanej tak, že plocha S je kolmá na magnetické indukčné čiary, teda $\vec{B} \parallel \vec{S}$, integrálny vzťah sa zjednoduší na obyčajný súčin veľkostí vektorov:

$$\phi = NBS \quad (3)$$

Permanentné magnety poskytujú časovo stále magnetické pole, preto bude časová zmena magnetickej indukcie závisieť iba od miery nárastu časti plochy cievky, ktorá sa pri pohybe rámika už nachádza nad magnetmi, teda

$$\frac{d\phi}{dt} = NB \frac{dS}{dt} \quad (4)$$

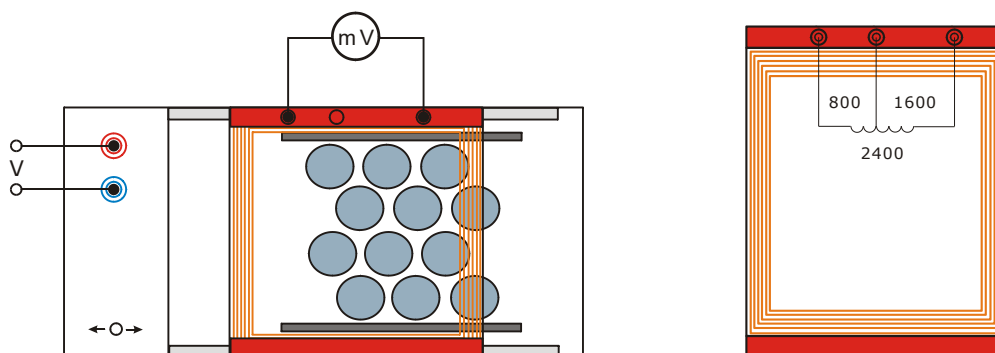
Ak sa rámik s cievkou pohybuje konštantnou rýchlosťou smere x kolmom na stranu cievky h , môžeme časovú zmenu indukcie vyjadriť nasledujúcim spôsobom:

$$\frac{d\phi}{dt} = NBh \frac{dx}{dt} = NBhv \quad (5)$$

Po dosadení do vzťahu (1) vidíme, že indukované napätie v cievke je lineárna funkcia veľkosti rýchlosti pohybu cievky:

$$U_i = -NBhv \quad (6)$$

Cieľom tejto laboratórnej úlohy je overenie lineárneho vzťahu $U_i(v)$.



Obr. 1: Vľavo: schematický náčrt posuvnej lavice s pohyblivou cievkou a poľom permanentných magnetov. Krúžok so šípkami v ľavom dolnom rohu predstavuje ovládač pohybu rámika s cievkou. Šípky naznačujú skutočný smer jeho pohybu. Do červeného a modrého konektora pripájame stabilizovaný napäťový zdroj pohonu motora. Voltmeter na meranie indukovaného napätia zapojíme na konektory cievky podľa požadovaného počtu závitov. Vpravo: Zapojenie cievok s príslušnými počtami závitov. (Obrázky sme prevzali z návodu k zariadeniu od výrobcu 3B Scientific.)

Prístroje a pomôcky

Stabilizovaný napäťový jednosmerný zdroj $0\text{ A} - 5\text{ A}$, $0\text{ V} - 20\text{ V}$,

doska s permanentnými magnetmi,

posuvná dráha s motorom a s ozubenými plochými remeňmi rýchlosť motora regulujeme vstupným napätím v rozsahu $0\text{ V} - 12\text{ V}$,

rám s indukčnými cievkami,

analógový multimeter na meranie indukovaného napätia,

vodiče,

stopky,

dĺžkové meradlo,

teslameter s pozdĺžnou Hallovou sondou.

Postup práce

Strednú hodnotu magnetickej indukcie kolmej na plochu indukčnej cievky odmeriame dvomi metódami. Jednak na základe indukovaného napätia pri pohybe cievky podľa vzťahu (6), ale aj pomocou teslametra. To je zariadenie, ktoré meria veľkosť magnetickej indukcie Hallovou sondou.

Meranie indukovaného napätia

1. Dĺžkovým meradlom odmeriame priečny rozmer cievky h a hrúbku zväzku vodičov cievky D .
2. Dosku s magnetmi umiestnime medzi hnacie remene približne do stredu dráhy.
3. Rám s cievkou opatrne položíme na ľavý začiatok dráhy na hladké plochy ozubeného remeňa pohonu. Skontrolujeme, či je prepínač smeru chodu motora v polohe 0.
4. Na multimetri pripojenom k cievke nastavíme požadovaný rozsah a multimeter zapneme – zvolíme režim merania jednosmerného napätia s nulou uprostred. Ak treba, nastavíme nulovú polohu ručičky prístroja.
5. Na vypnutom stabilizovanom zdroji napájania motorčeka skontrolujeme, či sú všetky ovládače v ľavej krajnej polohe. Zapneme zdroj. Ľavý ovládač elektrického prúdu (prúdovú ochranu) otočíme približne do $3/4$ jeho celkového rozsahu.



Motor pohonu pohybu cievky pracuje v rozsahu vstupných napätí **od 0 V do 12 V**. Tieto hodnoty nesmieme prekročiť, pretože môže dôjsť k poškodeniu motora. Pred zapnutím zdroja a nastavením napájacieho napätia skontrolujeme okrem veľkosti napätia aj jeho polaritu.

6. Pravým (*coarse*) ovládačom zdroja nastavíme požadovanú hodnotu napätia.
7. Rám s cievkou uvedieme do pohybu prepnutím prepínača smeru pohybu doprava ($\rightarrow$).
8. Zapišeme absolútne hodnoty kladnej aj zápornej maximálnej výchylky napätia počas pohybu doprava. Napätie zaznamenávame v dielikoch vybranej stupnice multimetra, prevod na volty urobíme pri vyhodnotení.
9. Na konci dráhy zastavíme pohyb cievky – prepneme prepínač ovládania pohybu do polohy 0.
10. Prepnutím prepínača smeru pohybu doľava ($\leftarrow$) uvedieme rám s cievkou opäť do pohybu.
11. Zapišeme absolútne hodnoty kladnej aj zápornej maximálnej výchylky napätia počas pohybu doľava.
12. Na ľavom okraji dráhy zastavíme pohyb cievky. **Nemeníme hodnotu napájacieho napätia.**
13. Pohyb cievky zopakujeme ešte raz oboma smermi **pri tom istom napájacom napätí** a stopkami odmeriame dobu, počas ktorej prejde rámik určitú vzdialenosť (napr. 20 cm).

14. Zmeníme napätie na zdroji a postup opakujeme od bodu 6.
15. Po skončení merania otočíme všetky voliče prúdu a napätia na zdroji do ľavej krajnej polohy a vypneme zdroj.

Odporúčané hodnoty a rozsahy

V priebehu merania sa snažíme zachovať rovnaké experimentálne podmienky, preto musíme postup navrhnuť tak, aby sme sa napríklad vyhli prepínaniu rozsahu voltmetra. Náhla zmena podmienok spôsobí skokové zmeny údajov a skomplikuje vyhodnotenie laboratórnej úlohy.

Nasledujúce odporúčania vychádzajú z praxe a vedú zväčša k uspokojivým výsledkom. V laboratóriu sa riadime pokynmi cvičiacich pedagógov. Ak neurčia inak, môžeme použiť tieto hodnoty:

- Zvolíme cievku s počtom závitov 1 600. Zodpovedajúce pripojenie voltmetra je na obrázku 1 vpravo. Riadime sa rozstupmi medzi konektormi.
- Multimeter prepneme na meranie jednosmerného napätia s rozsahom 0,3 V. Pri meraní použijeme spodnú stupnicu.
- Rýchlosť motora regulujeme napätiami od 2 V do 10 V s krokom 1 V. Môžeme tak realizovať 9 meraní v rámci jedného rozsahu voltmetra.

Meranie magnetického poľa teslametrom

1. Rám s cievkou umiestnime nad pole s magnetmi tak, aby sa jeho pravá hrana s vyznačenými meracími bodmi nachádzala približne v strede dráhy.
2. Zapneme teslameter a skontrolujeme nastavenie rozsahu na 200 mT.
3. Hallovu sodnu umiestnime do dostatočnej vzdialenosti od magnetov a zapíšeme nulovú hodnotu B_0 .
4. Sondy postupne zvislo prikladáme k okraju rámu cievky k vyznačeným meracím bodom.
5. Hodnoty na displeji teslametra a polohu sondy zapisujeme do tabuľky. Susedná vzdialenosť meracích bodov je 2 cm

Vyhodnotenie merania

Najprv vyčíslime rýchlosti pohybu cievky ako priemernú hodnotu pri pohybe doprava a doľava:

$$v = \frac{2\ell}{t_R + t_L} \quad (7)$$

kde ℓ je dĺžka meraného úseku, t_R je doba pohybu doprava a t_L je doba pohybu doľava.

Do posledného stĺpca tabuľky v protokole zapíšeme indukované napätia U_i , ktoré vyjadríme ako aritmetický priemer štyroch hodnôt pre každú rýchlosť pohybu cievky:

$$U_i = \frac{\eta}{4}(|U_{R+}| + |U_{R-}| + |U_{L+}| + |U_{L-}|) \quad (8)$$

kde η je prevodová konštanta v jednotkách mV/dielik. Jej hodnota súvisí so zvoleným rozsahom multimetra a so stupnicou, ktorú sme pri meraní používali.

Na základe analýzy experimentu očakávame lineárnu závislosť indukovaného napätia a rýchlosti pohybu cievky:

$$U_i = kv \quad (9)$$

pričom k je konštanta úmernosti. Podľa vzťahu (6) sa táto konštanta rovná súčinu počtu závitov, veľkosti magnetickej indukcie a šírky cievky. Znamienko mínus nebudeme brať do úvahy, pretože pracujeme s veľkosťami napätia a rýchlosti:

$$k = NBh \quad (10)$$

Dvojice hodnôt U_i a v spracujeme metódou lineárnej regresie a získame smernicu k . Magnetickú indukciu poľa potom vyjadríme zo vzťahu (10):

$$B = \frac{k}{Nh} \quad (11)$$

Odhad neistoty

Tradičná lineárna regresia predpokladá, že neistoty x -ových hodnôt sú zanedbateľné voči neistotám y -ových hodnôt. To však nie je náš prípad. Aj keď takto získanú smernicu môžeme považovať za akceptovateľnú, jej smerodajná odchýlka nie je v takýchto situáciách relevantná pri odhade neistoty výslednej veličiny. Urobíme ho preto radšej zo základného vzťahu (6):

$$B = \frac{U_i}{Nhv}$$

odkiaľ pre relatívne smerodajné odchýlky vyplýva:

$$\delta_B^2 = \delta_{U_i}^2 + \delta_v^2 + \delta_h^2, \quad \text{alebo} \quad \left(\frac{s_B}{B}\right)^2 = \left(\frac{s_{U_i}}{U_i}\right)^2 + \left(\frac{s_v}{v}\right)^2 + \left(\frac{s_h}{h}\right)^2$$

Indukované napätie. Neistota merania jednosmerného napätia na analógovom multimetri je určená triedou presnosti prístroja. Krajná odchýlka každého merania je percento p zo zvoleného rozsahu U_m . Číslo p sa nazýva aj *trieda presnosti*. Smerodajnú odchýlku hodnoty napätia získanej meraním na voltmetri vyčíslime tak, že krajnú odchýlku vydělíme číslom $\sqrt{3}$:

$$s_U = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{p}{100} U_m$$

Výslednú hodnotu indukovaného napätia sme získali ako aritmetický priemer štyroch meraných hodnôt s touto smerodajnou odchýlkou. Smerodajná odchýlka takéhoto napätia bude teda ešte $\sqrt{4} = 2$ -krát menšia:

$$s_{U_i} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{p}{100} U_m$$

Druhú mocninu relatívnej odchýlky indukovaného napätia vyjadríme v tvare:

$$\delta_{U_i}^2 = \frac{s_{U_i}^2}{U_i^2} = \frac{1}{12} \left(\frac{p}{100} \frac{U_m}{U_i} \right)^2$$

Rýchlosť. Veľkosť rýchlosti pohybu cievky získame zo vzťahu (7). Závisí teda od troch veličín: dráha ℓ , doba pohybu doprava t_R a doba pohybu doľava t_L . Dráha zodpovedá vzdialenosti pevných rysiek na pravítku (napr. 10 cm a 30 cm) a poloha týchto značiek je veľmi presná. Pohybuje sa na úrovni desiatín milimetra, preto ju zanedbáme. Neistota rýchlosti je determinovaná iba neistotou merania času s_t :

$$\delta_v^2 = \delta_\ell^2 + \delta_t^2 \approx 2 \left(\frac{s_t}{t_R + t_L} \right)^2$$

Reakčnú dobu reflexného oblúka experimentátora odhadneme na $\tau_r = 0,2$ s a keďže stláčame stopky na začiatku aj na konci meraného úseku, môžeme smerodajnú odchýlku času vyjadriť zložením smerodajných odchýlok dvoch nezávislých dejov:

$$s_t^2 = \tau_r^2 + \tau_r^2 = 2\tau_r^2$$

Relatívna neistota rýchlosti potom bude

$$\delta_v^2 = 4 \frac{\tau_r^2}{(t_R + t_L)^2} = \left(\frac{\tau_r}{t} \right)^2 = \left(v \frac{\tau_r}{\ell} \right)^2$$

kde $t = (t_R + t_L)/2$ je priemerná doba meraní pohybu doprava a doľava.

Šírka cievky. Odhad pričného rozmeru cievky h prispieva do celkovej neistoty veľkou mierou. Fyzicky totiž ide o zväzok drôtu s hrúbkou $D \approx 1$ cm. To znamená, že h dokážeme určiť s presnosťou približne $D/2 = 0,5$ cm, čo predstavuje smerodajnú odchýlku $s_h = D/2\sqrt{3}$.

Druhá mocnina relatívnej smerodajnej odchýlky pričného rozmeru (šírky) cievky:

$$\delta_h^2 = \frac{s_h^2}{h^2} = \frac{1}{12} \left(\frac{D}{h} \right)^2$$

Magnetická indukcia. Zložením predchádzajúcich smerodajných odchýlok dotaneme výslednú smerodajnú odchýlku indukcie magnetického poľa:

$$s_B = B \sqrt{\frac{1}{12} \left(\frac{p}{100} \frac{U_m}{U_i} \right)^2 + \left(v \frac{\tau_r}{\ell} \right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{D}{h} \right)^2} \quad (12)$$

kde p je trieda presnosti voltmetra v percentách, U_m je použitý rozsah, τ_r je reakčná doba reflexného oblúka experimentátora (bežne 0,2 s), h je stredný pričný rozmer cievky a D je hrúbka zväzku drôtov tvoriacich cievku.

Na výpoet smerodajnej odchýlky zvolíme indukované napätie U_i a zodpovedajúcu rýchlosť v približne zo stredy súboru nameraných hodnôt, dosadíme ich do vzťahu (12), vyčíslime odmocninu a za B dosadíme výslednú hodnotu získanú z lineárnej regresie podľa vzťahu (11).

Vyhodnotenie merania teslametrom

Od každej odmeranej hodnoty odčítame nulovú hodnotu B_0 a získame veľkosti magnetickej indukcie v jednotlivých meracích bodoch:

$$B_j = B_T - B_0 \quad (13)$$

Magnetické pole permanentných magnetov nie je v rámci plochy indukčnej cievky homogénne. Vyhodnotením elektromagnetickej indukcie podľa vzťahu (11) sme získali priemernú hodnotu poľa cez priečny rozmer cievky:

$$\bar{B} = \frac{1}{h} \int_0^h B(y) dy$$

Aby sme mohli výsledok porovnať s priamym meraním teslametrom, musíme vyčísliť integrál v predchádzajúcom vzťahu. Na aproximáciu integrálu v prípade ekvidistančných dikrétnych meraní použijeme lichobežníkovú metódu, z ktorej vyplýva, že

$$\bar{B} \approx \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2} B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_7 + \frac{1}{2} B_8 \right) \quad (14)$$

kde $B_1, B_2, \dots, B_8$ sú hodnoty magnetickej indukcie poľa získaných meraním v meracích bodoch.

Neistota strednej hodnoty magnetickej indukcie

Pri tomto meraní identifikujeme tri zdroje neistôt: neistota jednotlivých meraní súvisiaca s presnosťou prístroja, neistota spôsobená hrúbkou D samotnej cievky a nesprávna kalibrácia prístroja.

Najväčší vplyv má práve neistota kalibrácie prístroja, ktorú odhadujeme hrubo na 5 % z meranej hodnoty. V skutočnosti môže byť aj väčšia. Pri jemnom otáčaní sondy okolo zvislej osi si môžeme všimnúť, že hodnoty na displeji sa v tom istom meracom bode líšia aj o 10 %.

Keďže zvyšné zdroje neistôt majú zanedbateľný vplyv na presnosť merania, určíme celkovú smerodajnú odchýlku strednej hodnoty magnetickej indukcie meranej teslametrom približne ako päť percent z výslednej hodnoty:

$$s_{\bar{B}} \approx s_{\text{kal}} = 0,05 \bar{B} \quad (15)$$

Meno:

Krúžok:

Dátum merania:

Protokol laboratórnej úlohy č. 33

Elektromagnetická indukcia

Stručný opis metódy merania

Vzťahy, ktoré sa používajú pri meraní

Prístroje a pomôcky

Záznam merania, výpočty a výsledky**Konštanty a parametre experimentu**

počet závitov cievky	N	=	
šírka cievky	h	=	mm
hrúbka zväzku vodičov cievky	D	=	mm
rozsah analógového multimetra	U_m	=	mV
prevodová konštanta	η	=	mV/dielik
trieda presnosti multimetra	p	=	%
dĺžka meraného úseku	ℓ	=	mm
reakčná doba	τ_r	=	s

Meranie indukovaného napätia

		pohyb doprava			pohyb doľava			priemerné hodnoty	
č.	U V	$ U_R^+ $ d	$ U_R^- $ d	t_R s	$ U_L^+ $ d	$ U_L^- $ d	t_L s	v mm/s	U_i mV
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									

Lineárna regresia

smernica závislosti $U_i(v)$	$k =$
koefficient determinovanosti	$\mathcal{R}^2 =$

Výpočet magnetickej indukcie podľa vzťahu (11)

$$B =$$

Výpočet smerodajnej odchýlky magnetickej indukcie podľa vzťahu (12)

$$s_B =$$

Sumarizácia výsledkov so správnym zaokrúhlením

magnetická indukcia (11)	$B =$
smerodajná odchýlka (12)	$s_B =$

Meranie teslametrom

nulová hodnota $B_0 =$ mT			
merací bod	poloha y mm	B_T mT	B_j mT
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

Sumarizácia výsledkov so správnym zaokrúhlením

magnetická indukcia podľa vzťahu (14)	$\bar{B} =$
smerodajná odchýlka magnetickej indukcie (15)	$s_{\bar{B}} =$

Prílohy protokolu

Graf závislosti $U_i(v)$ indukovaného napätia od rýchlosti pohybu cievky.

Zhodnotenie výsledkov

Dátum odovzdania protokolu:

Podpis študenta:

Hodnotenie a podpis učiteľa: