

Laboratórna úloha č. 32

Coulombov zákon



Úlohy

1. Experimentálne overenie závislosti elektrostatickej sily a vzájomnej vzdialenosti bodových nábojov.
2. Určenie veľkosti efektívneho náboja nabitých gúl.

Historický úvod

Fakt, že veľkosť elektrostatickej sily pôsobiacej medzi dvomi bodovými nábojmi klesá s druhou mocninou vzdialenosti si všimol už v roku 1760 profesor Univerzity v Edinburgu John Robison. Svoje poznatky však nepublikoval. Prvýkrát sa o tejto možnosti zmienil Joseph Priestley v knihe s názvom *The History and Present State of Electricity* o sedem rokov neskôr. Pri výskume elektriny si všimol možnú analógiu medzi elektrickou a gravitačnou silou.

Tieto úvahy inšpirovali Henryho Cavendisha, aby zrealizoval experiment na overenie druhej mocniny závislosti sily od vzdialenosti nábojov. Teoretický predpoklad úspešne dokázal veľmi presnými meraniami v rokoch 1771 – 1773, ale výsledky nepublikoval podobne ako John Robinson.

Cavendishov dôkaz zákona druhej mocniny je pozoruhodný aj z hľadiska matematiky. Ide o nepriamu metódu, pri ktorej sa meria nulový náboj v dutine nabitej gule. Výsledok predpovedal už Newton pre gravitačnú silu. Ak by totiž sila neklesala s druhou mocninou, ale povedzme ako $1/r^{2,01}$, muselo by sa v dutine nachádzať merateľné pole. Jedine presná dvojka vytvorí v homogénnej dutine nulové pole. Cavendish ukázal, že exponent má hodnotu $2 \pm 0,00002$. Ide o netriviálnu kombináciu teórie polí, diferenciálnej geometrie a experimentálnej fyziky.

Prvý vedec, ktorý vykonal systematické priame merania a aj ich konečne zverejnil, bol francúzsky fyzik Charles Augustin Coulomb. Výsledky publikoval v roku 1785 a formuloval zákon, ktorý dnes nesie jeho meno.

Coulomb skonštruoval veľmi presné torzné váhy, na ktorých bola pripevnená malá guľa. Druhú guľu umiestnil nezávislo do určitej vzdialenosti. Po nabití gúl odmeral výchylku na torzných váhach a prepočítal ju na silu na základe znalosti torznej pružnosti vlákna. Bola to síce priama metóda merania, ale bola zároveň komplikovaná a náchylná na rôzne nedostatky aparatury, napríklad na zvyškový náboj. Dôkaz závislosti $F \sim 1/r^2$ nebol ani zďaleka taký presný ako v prípade Cavendisha.

Systematická práca Charlesa Coulomba ako aj jeho vedecké závery sú pozoruhodné a predstavujú dôležitú súčasť neskoršej Maxwellovej teórie elektromagnetického poľa. Zákon hovorí, že veľkosť elektrostatickej sily pôsobiacej medzi dvomi bodovými nábojmi je priamo úmerná súčinu veľkostí nábojov a nepriamo úmerná druhej mocnine ich vzájomnej závislosti.

Coulombov zákon má v súčasnosti matematickú formu

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (1)$$

kde Q_1 a Q_2 sú veľkosti bodových nábojov, $\epsilon_0 = 8,8541878188(14) \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ je elektrická konštanta¹ a r je vzájomná vzdialenosť nabitých telies.

Práve závislosť sily od druhej mocniny vzdialenosti budeme overovať v tomto laboratórnom cvičení priamym meraním elektrostatickej sily pôsobiacej na nabitú guľu.

Prístroje a pomôcky

- zdroj vysokého napätia s adaptérom napájania
- nabíjací kondenzátor ($C = 820 \text{ pF}$, $Z = 2 \text{ M}\Omega$)
- vodivé gule s priemerom 38 mm
- posuvná dráha s vozíkom s úchytom vodivej gule, krokový motor, ovládač krokového motora s adaptérom napájania
- mikrováhy s úpravou na meranie vodorovnej sily
- uzemňovacia zástrčková konzola, uzemňovací náramok, uzemňovací kábel zdroja vysokého napätia, uzemňovací kábel kondenzátora, uzemňovací kábel na vybíjanie gúľ a kondenzátora



Pred pripojením do elektriny sa presvedčíme, že všetky zariadenia sú riadne uzemnené.

Posuvná lavica s krokovým motorom

Najmenší posun, o ktorý môžeme posunúť vozík je 1 mm. Túto hodnotu zároveň považujeme za presnosť odčítania polohy. Podľa definície je smerodajná odchýlka určenia polohy

$$s_r = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ mm} = 0,577 \text{ mm} \quad (2)$$

Ovládač krokového motora umožňuje jednorazový posun vozíka o 1, 5, 10, 50 alebo 100 mm. Základný smer pohybu je doľava, smerom od polohy motora (**forward**). Smer je indikovaný na displeji ovládača šípku <--. Zalačením červeného tlačidla **back** zmení šípka

¹Toto je jeden zo spôsobov zápisu číselnej hodnoty spolu s jeho štandardnou neistotou používaný najmä v metrológii pri uvádzaní vysokých presností. Znamená, že rád poslednej číslice v zátvorke je rovnaký ako rád poslednej číslice desatinného rozvoja čísla pred zátvorkou. Inými slovami ide o skrátený zápis $8,8541878188 \pm 0,0000000014$. V laboratórnych cvičeniach pracujeme so zaokrúhlenou hodnotou na 4 platné číslice, teda $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$

smer na opačný ($-->$) a pohyb vozíka bude doprava (**backward**). Po uvoľnení tlačidla sa smer opäť vráti na pôvodnú hodnotu.

Ak chceme vozík posunúť o 50 mm doľava, zatlačíme a vzápätí uvoľníme tlačidlo 50. Pri posúvaní vpravo treba najprv držať zatlačené červené tlačidlo **back** a potom zvoliť tlačidlo s hodnotou posunutia, napr. 50.

Aktuálnu pozíciu vozíka vidíme na displeji (údaj **s** mm/s). V skutočnosti je to relatívna poloha voči nulovej pozícii, ktorú môžeme kedykoľvek nastaviť podržaním tlačidla **back** a do toho krátkym zatlačením tlačidla **home**. Ak nedopatrením potlačíme obe červené tlačidlá dlhšiu dobu (cca 2s), spustí sa režim programovania čierneho tlačidla 100. Na opustenie tohto režimu a správnu funkciu tohto tlačidla vykonáme nasledujúcu sériu úkonov:

- na displeji svieti **s** =. Zatlačíme tlačidlo 100, nastavíme dĺžku presunu vozíka na pôvodnú hodnotu.
- Zatlačíme **home**, čím potvrdíme zvolenú dĺžku posunu 100 mm. Na displeji svieti **v** =. Zatlačíme nasledujúcu sekvenciu tlačidiel: 50, 10, 10, 10 a nastavíme rýchlosť na predvolenú hodnotu 80 mm/s.
- Tlačidlom **home** potvrdíme zvolenú hodnotu rýchlosti a automaticky vyjdeme z režimu programovania čierneho tlačidla do základného stavu ovládača.
- Môžeme pokračovať v práci.

Tlačidlo **home** slúži na presun vozíka z ľubovoľnej polohy do pozície 0. Túto funkciu počas merania nepoužívame, pretože môžeme nechtiac poškodiť mikrováhy.



Dbáme na to, aby sme počas merania nestlačili samostatne tlačidlo **home**.

Zdroj vysokého napätia s nabíjacím kondenzátorom



Experimentátor, ktorý manipuluje so zdrojom vysokého napätia a s nabíjacím kondenzátorom musí byť uzemnený uzemňovacím náramkom. Ostatní spolupracovníci by sa mali nachádzať v dostatočnej vzdialenosti (min. 1 m) od laboratórnej zostavy.

Zdroj vysokého napätia umožňuje voliť hodnoty 5 kV, 10 kV, 15 kV, 20 kV a 25 kV. Zariadenie musí byť uzemnené na rovnakej potenciálovej hladine ako záporná (modrá) elektróda nabíjacieho kondenzátora. Kladnú (červenú) elektródu kondenzátora vkladáme do otvoru zdroja vysokého napätia označeného červeným ochranným lemom. Kondenzátor musí byť počas nabíjania uzemnený.



Nikdy sa nedotýkame holými rukami alebo inou obnaženou časťou ľudského tela neizolovaných častí elektrických zariadení. Môže dôjsť k elektrickému výboju a k následnému poškodeniu prístrojov alebo zdravia.

Gulú nabíjame tak, že sa jemne dotkneme jej povrchu obnaženou elektródou nabíjacieho kondenzátora. Pred každým nabitím guľu vybijeme dotykcom uzemňovacieho kábla. Približovanie vodičov počas nabíjania môže sprevádzať iskrenie medzi guľou a kondenzátorom. Ide o normálny jav a treba po výboji zabezpečiť, aby sa elektróda kondenzátora a povrch guľe navzájom fyzicky naozaj dotkli. Kondenzátor držíme tak, aby pri nabíjaní alebo inej manipulácii nedošlo k mimovoľnému kontaktu obnažených častí elektrických súčiastok alebo povrchu guľ s povrchom tela experimentátora.

Kladný náboj prenášame na guľu z kladnej (červenej) elektródy kondenzátora, záporný z modrej elektródy. Pri nabíjaní guľe zabezpečíme, aby bola protihľadá elektróda kondenzátora riadne uzemnená. Je jedno, či plánujeme guľu nabiť kladným alebo záporným nábojom, kondenzátor vždy nabíjame rovnako – kladnou elektródou v nabíjacom otvore zdroja vysokého napätia.

Ak teda chceme nabiť guľu záporným nábojom, odpojíme uzemňovací kábel z modrej elektródy nabitého kondenzátora, pripojíme ho na červenú a dotkneme sa guľe modrou obnaženou elektródou.

Mikrováhy

Elektrostatickú silu medzi nabitými guľami meriame pomocou špeciálne upravených laboratórnych váh s miligramovou presnosťou. Na meracom hrote sa namiesto misky nachádza pravouhlé momentové rameno, ktoré prenáša vodorovnú silu do vertikálneho smeru v pomere 1/10. Znamená to, že údaj na váhach v gramoch zodpovedá sile v milinewtonoch:

$$1 \text{ g} \cong 1 \text{ mN}$$

Pred meraním sa uistíme, že váhy sú v režime g. Ak nie, nastavíme tento režim postupným stláčaním tlačidla **mode**.

Neistota displeja váh je 1 mg, čo zodpovedá meranej sile 10^{-3} mN. Smerodajná odchýlka merania sily je podľa štatistickej definície

$$s_F = \frac{10^{-3}}{\sqrt{3}} \text{ mN} = 0,577 \mu\text{N} \quad (3)$$

Postup práce

Pred tým ako sa pustíme do samotného merania, oboznámime sa s jednotlivými súčasťami experimentu. Odporúčame prečítať si predchádzajúcu kapitolu Prístroje a pomôcky a vyskúšať si manipuláciu s posuvnou dráhou.

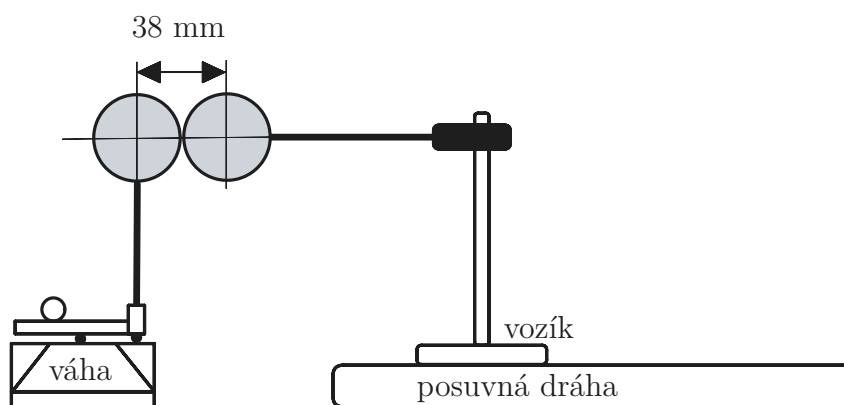
Príprava na meranie

1. Mikrováhy s pripevnenou guľou opatrne presunieme z dosahu druhej guľe tak, aby pri akejkoľvek polohe guľe na posuvnej dráhe nedošlo ku kontaktu guľ.

2. Skontrolujeme, či je nožička gule na dráhe zarovnaná s pozdĺžnou osou dráhy. Ak nie, jemným natočením držiaka ju zarovnáme.
3. Použijme prednastavené tlačidlá pre 100, 50, 10, 5 alebo 1-milimetrový posun na presunutie vozíka s guľou k ľavému začiatku dráhy, aby sa ľavý okraj vozíka nachádzal niekoľko centimetrov od okraja dráhy.
4. Nastavíme túto polohu ako nulovú podržaním tlačidla **back** a súčasným **krátkym** zatlačením tlačidla **home**.
5. Posunieme vozík o 38 mm doprava nasledujúcim postupom:
 - podržíme tlačidlo **back** a zatlačíme tlačidlo 50. Akonáhle sa vozík dá do pohybu, obe tlačidlá uvoľníme. Po zastavení sa bude nachádzať v polohe 50 mm.
 - Stlačíme tlačidlo 10 (bez tlačidla **back**),
 - potom **dvakrát** tlačidlo 1.

Poloha vozíka by mala byť 38 mm.

6. Opatrným prisunutím mikrováh dostaneme stredu oboch gúľ na predĺženú os dráhy tak, aby sa jemne dotýkali bez vzájomného mechanického pôsobenia (pozri obrázok 1).
7. Skontrolujeme, či sú obe gule v rovnakej výške. Ak nie, upravíme výšku gule na pohyblivom držiaku na dráhe.
8. Presunieme vozík na dráhe do polohy 300 mm – **držíme stlačené** tlačidlo **back** a postupne stláčame sekvenciu tlačidiel 100, 100, 50, 10, 1, 1. Sledujeme pri tom údaj o aktuálnej polohe na displeji ovládača.



Obr. 1: Schematické znázornenie usporiadania na začiatku experimentu. Poloha vozíka je 38 mm, nenabité gule sú tesne vedľa seba bez vzájomného silového pôsobenia.

Nabíjanie gúl

1. Obe gule vybijeme. Opatrne sa postupne dotkneme povrchu jednej a druhej gule voľným koncom uzemneného kábla.
2. Na zdroji vysokého napätia zvolíme požadovanú hodnotu napätia a niekoľko sekúnd počkáme.
3. Červenú elektródu uzemneného kondenzátora vsunieme do nabíjacieho otvoru zdroja a nabíjame aspoň 12 sekúnd.
4. Kondenzátor vyberieme z nabíjacieho otvoru, prepínač napätia na zdroji prepne do polohy 0. Pri manipulácii s nabitým kondenzátorom dávame pozor, aby sme sa nedotkli holou rukou alebo inou časťou tela neizolovaných vodičov. Nabitý kondenzátor nekladíme do blízkosti iných zariadení alebo káblov.
5. Elektródu nabitého kondenzátora opatrne oprieme o povrch gule na mikrováhach.



Je dôležité, aby sme nabíjali guľu pripevnenú k mechanizmu váh vždy ako prvú.

6. Kondenzátor oddialíme a zabezpečíme, aby nedošlo k náhodnému vybitiu. Ak sú váhy vypnuté, zapneme ich a počkáme, kým sa ustália. Ak nie je na displeji nulový údaj, vynulujeme ich funkciou TARE.
7. Neuzemnenú elektródu kondenzátora opatrne oprieme o druhú guľu a nabijeme ju.
8. Voľný koniec uzemneného kábla pripojíme k voľnému pólu kondenzátora a kondenzátor odložíme.
9. Zapišeme hodnoty a znamienka nabíjajúcich napätí pre obe gule do tabuľky.

Meranie

1. V počiatočnej polohe vozíka, 300 mm, zapišeme hodnotu z displeja mikrováh do tabuľky.
2. Posunieme vozík o 20 mm doľava tak, že **dvakrát** zatlačíme tlačidlo 10.
3. Po ustálení váh zapišeme hodnotu z displeja do tabuľky. Ustálenie váh indikuje symbol $\odot$ v ľavom hornom rohu displeja.
4. Pokračujeme až do polohy vozíka 120 mm. Celé meranie treba urobiť čo najrýchlejšie.
5. Po skončení vrátime vozík do polohy 300 mm, vybijeme gule a podľa potreby zopakujeme nabíjanie a meranie s iným napätím.

Vyhodnotenie merania

Na meranie sily používame špeciálne prispôsobené mikrováhy s digitálnym displejom. Údaj na displeji je priamo úmerný meranej sile. Vzdialenosť nábojov r určujeme pomocou relatívnej polohy vozíka na pohyblivej dráhe. Výsledkom merania sú dvojice údajov (r, f) , medzi ktorými očakávame nasledujúci vzťah:

$$f = k \frac{1}{r^2} + f_0 \quad (4)$$

Matematicky teda ide o lineárnu závislosť medzi veličinami f a $1/r^2$ so smernicou k . Je to formálne vyjadrenie Coulombovho zákona (1) s pridanou konštantou f_0 :

$$F = f - f_0 = k \frac{1}{r^2} \quad (5)$$

Aj keď váhy disponujú nulovacou funkciou TARE, nestabilita celej zostavy a neistota v počiatočnom nastavení nulovej vzdialenosti gúľ spôsobujú, že nie sme schopní zabezpečiť nulový signál s dostatočnou presnosťou. Experimentálne teda meriame závislosť

Dvojice údajov (r, f) z experimentu spracujeme metódou lineárnej regresie podľa vzťahu (4). O tom, do akej miery je sila F priamo úmerná $1/r^2$, hovorí koeficient determinovanosti R^2 . Pri jeho analýze sa orientujeme podľa počtu číslíc 9 bezprostredne za desatinnou čiarkou. V experimentálnej praxi považujeme za potvrdenie platnosti modelu, ak sa za desatinnou čiarkou nachádzajú dve deviatky za sebou (napr. $R = 0,994$).

Pomocou smernice k lineárnej závislosti (4) vyčíslime veľkosť efektívneho náboja na každej guli:

$$Q_{\text{ef}} = \sqrt{4\pi\epsilon_0|k|} \quad (6)$$

Smerodajnú odchýlku v tomto prípade neurčujeme z lineárnej regresie, pretože štandardná metóda predpokladá, že x-ové údaje sú oveľa presnejšie ako y-ové. V našom prípade sú neistoty oboch údajov porovnateľné. Odhadneme ju radšej zo vzťahu pre priemerný náboj podľa Coulombovho zákona (1):

$$Q_{\text{ef}} = \sqrt{|Q_1 Q_2|} = \sqrt{4\pi\epsilon_0 \frac{r^2}{F}}$$

Predpokladáme, že sila F a vzdialenosť gúľ r sú štatisticky nezávislé veličiny, potom pre relatívne smerodajné odchýlky platí:

$$\delta_Q^2 = \delta_r^2 + \frac{1}{4}\delta_F^2 \implies \left(\frac{s_Q}{Q_{\text{ef}}}\right)^2 = \left(\frac{s_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{s_F}{2F}\right)^2$$

Odkiaľ dostávame smerodajnú odchýlku v tvare:

$$s_Q = Q_{\text{ef}} \sqrt{\left(\frac{s_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{s_F}{2F}\right)^2} \quad (7)$$

smerodajné odchýlky s_r a s_F sú určené neistotami merania polohy a sily. Bližšie o nich hovoríme v časti Prístroje a pomôcky, konkrétne sú to vzťahy (2) a (3).

Na vyčíslenie s_Q použijeme reálne namerané hodnoty r a zodpovedajúce f zo stredu intervalu, pričom $F = f - f_0$. Takýto odhad je zvyčajne úplne postačujúci a v prípade podobných dát korešponduje s vyhodnotením neistoty zložitejšími štatistickými metódami.

Prílohy protokolu

K protokolu priložíme grafy $F(1/r^2)$ odmeraných hodnôt závislosti elektrostatickej sily od prevrátenej hodnoty štvorca vzdialenosti gúľ pre rôzne nabíjacie napätia.

Meno:

Krúžok:

Dátum merania:

Protokol laboratórnej úlohy č. 32

Coulombov zákon

Stručný opis metódy merania

Vzťahy, ktoré sa používajú pri meraní

Prístroje a pomôcky

Záznam merania, výpočty a výsledky

nabíjacie napätie $\pm$ (kV)							
č.	r mm	$1/r^2$ m ⁻²	f μN	f μN	f μN		
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
smernica k (μN m ²)							
konštanta f_0 (μN)							
koeficient determinovanosti R^2							
efektívny náboj Q_{ef} (nC)							
smerodajná odchýlka s_Q (nC)							

Vzorový výpočet efektívneho náboja podľa vzťahu (6)

$$Q_{\text{ef}} = \sqrt{4\pi\epsilon_0|k|} =$$

Hodnoty pre odhad smerodajnej odchýlky efektívneho náboja

nabíjacie napätie kV		poloha r mm	сила $F = f - f_0$ μN
smerodajné odchýlky		$s_r =$ mm	$s_F =$ μN

Vzorový výpočet smerodajnej odchýlky efektívneho náboja podľa vzťahu (7)

$$s_Q = Q_{\text{ef}} \sqrt{\left(\frac{s_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{s_F}{F}\right)^2} =$$

Zhodnotenie výsledkov

Dátum odovzdania protokolu:

Podpis študenta:

Hodnotenie a podpis učiteľa: