

Ivan Červeň

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

Vektory

Slovenská technická univerzita v Bratislave

2020

Druhé, upravené vydanie publikácie, ktorá pôvodne vyšla v rámci
rozvojového projektu

„Budovanie dištančného a elektronického vzdelávania na FEI STU“

Recenzenti pôvodného textu:

Prof. RNDr. Ing. Daniel Kluvanec, CSc.

Prof. RNDr. Stanislav Ondrejka, DrSc.

© Ivan Červen

ISBN 123456789

Na úvod

Súbor zošitkov s názvom *Fyzika po kapitolách* nie je učebnicou základného kurzu fyziky v pravom slova zmysle, skôr učebnou pomôckou, ktorá má pomôcť pri štúdiu a v príprave na skúšku. Každý zošitok obsahuje jednu kapitolu, prípadne dve menšie kapitoly. V prvom zošitku nájdete informácie o vektorových veličinách, potrebné pri štúdiu ostatných kapitol základného kurzu fyziky, ale ktoré sú vhodné aj pri štúdiu odborných technických disciplín. Do ostatných zošitkov sú zaradené kapitoly v takom poradí, v akom sa preberajú v štandardnom kurze fyziky na technických univerzitách, teda mechanika, kmitanie a vlnenie, náuka o teple, elektrostatické pole, elektrický prúd, pole magnetické a elektromagnetické, optika a výber z kvantových javov. Zošitky obsahujú texty, ktoré do značnej miery zodpovedajú prednáškam najmä z obdobia, keď na ne bolo v učebných plánoch vyhradeného viac priestoru ako v súčasnosti. Sú doplnené obrázkami, riešenými príkladmi na ilustráciu textu a kontrolnými otázkami, ktoré poslúžia overiť si správne pochopenie textov. V zošitkoch nájdete úlohy na riešenie s uvedenými výsledkami, súhrn významných vzťahov a výkladový slovník, obsahujúci všetky dôležité pojmy, s ktorými sa v zošitku stretnete. Súčasťou niektorých zošitkov sú dodatky, v ktorých sú uvedené relatívne zložitejšie a dlhšie odvoodenia, ktoré by mohli narúšať plynulosť textu, ale aj state rozširujúce pohľad na príslušnú kapitolu.

V dnešnej elektronickej dobe na štúdium fyziky vám dobre poslúžia doplňujúce texty, ktoré nájdete na internetovej adrese Ústavu jadrového a fyzikálneho inžinierstva: www.ujfi.fe.i.stuba.sk. Nájdete tam aj odkazy na zaujímavé animácie pokrývajúce rôzne oblasti fyziky, počnúc animáciami vektorových operácií. Je tam možnosť prezerat' aj celý základný kurz fyziky zostavený kolektívom autorov z fyzikálnych katedier STU, v elegantnej multimedialnej úprave. Na tejto adrese môžete listovať aj vo vynikajúcej učebnici *Fyzika* profesora Dionýza Ilkoviča.

Texty pomohli vylepšiť viacerí študenti, ale najmä recenzenti. Všetkým ďakujem za pripomienky, ako aj upozornenia na chyby ktoré sa vyskytli v zošitkoch predbežne vydávaných prostredníctvom knižnice Fakulty elektrotechniky a informatiky. Recenzentom ďakujem za prečítanie textov pripravených na pôvodné vydanie a za realistické pripomienky k nim. Do druhého vydania sa zapojil aj doc. Ing. Peter Bokes PhD., ktorý prispel k vylepšeniu niekoľkých kapitol, a tak je aj ich spoluautorom. Kapitolu o hydromechanike napísal sám.

Toto druhé vydanie vychádza po odstránení zistených chýb prakticky len s málo zmeneným textom, ale doplnené o state rozširujúce pohľad v niektorých kapitolách.

OBSAH

TEXTY

1.1	Základné pojmy	
1.1.1	Označovanie vektorov	5
1.1.2	Súčet a rozdiel vektorov	7
1.1.3	Skalárny násobok vektora, jednotkový vektor	9
1.1.4	Zložky a súradnice vektora	10
1.2	Súčiny medzi vektormi	
1.2.1	Skalárny súčin	13
1.2.2	Vektorový súčin	16
1.2.3	Zmiešaný súčin	19
1.2.4	Dvojnásobný vektorový súčin	21
1.3	Derivácie vektorových funkcií	
1.3.1	Vektorová funkcia	24
1.3.2	Derivácia vektorovej funkcie podľa času	25
1.3.3	Derivácia súčinu vektorových funkcií	27
1.3.4	Gradient skalárnej funkcie	28
1.3.5	Divergencia a rotácia vektorovej funkcie	31
1.3.6	Viacnásobné derivácie	33
1.4	Integrácia vektorových funkcií	
1.4.1	Integrácia podľa času	36
1.4.2	Krivkový integrál, Stokesova veta	37
1.4.3	Plošný integrál, Gaussova veta	40

DODATKY

D1	Definícia vektorovej veličiny	43
D2	Stokesova veta	45
D3	Tok vektorovej veličiny	48
D4	Gaussova integrálna veta	49

SLOVNÍK	52
---------	----

ÚLOHY NA RIEŠENIE	57
-------------------	----

Vo fyzike a v technických disciplínach sa stretávame s veličinami, na určenie ktorých postačuje jediná hodnota. Pre takéto veličiny, medzi ktoré patria napr. teplota, hmotnosť alebo objem, používame názov **skalárne veličiny** (stručne **skaláry**). Často sa však stretávame s veličinami, ktoré charakterizujeme nie iba ich veľkosťou, ale aj smerom v priestore, takže na ich určenie treba viac údajov. Nazývame ich **vektorové veličiny** (stručne **vektory**). Navyše je pre ne typický spôsob sčítovania, ktorý geometricky znázorňujeme pomocou skladania orientovaných úsečiek. Medzi vektorové veličiny patrí napríklad *rýchlosť*, *sila*, alebo *intenzita elektrického poľa*. Cieľom kapitoly o vektorových veličinách je poskytnúť informácie o tom, ako s takýmito veličinami narábať, ako ich využiť pri zápise fyzikálnych vzťahov obsahujúcich vektorové veličiny. Vektorový počet má uplatnenie prakticky vo všetkých oblastiach fyziky, ale aj v mnohých technických disciplínach.

Potrebné vedomosti

Na zvládnutie tejto kapitoly je potrebné ovládať základy algebry (napr. determinanty), základy analytickej geometrie, základy matematickej analýzy – derivácie a integrály. Pred začatím štúdia kapitoly o deriváciách a integrácii vektorových funkcií treba mať aspoň minimálne vedomosti o funkciách viacerých premenných.

1.1 Základné pojmy

Kľúčové slová

Skalár, vektor, veľkosť vektora, absolútna hodnota vektora, súradnice vektora, zložky vektora, súčet vektorov, rozklad vektora na zložky, skalárny násobok vektora, kolineárne vektory, komplanárne vektory, rovnosť dvoch vektorov.

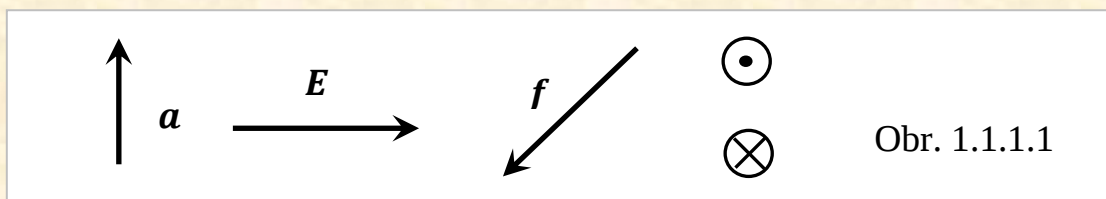
1.1.1 Označovanie vektorov

Presná **definícia** vektora používaná v algebre hovorí o n -tici čísel (v n -rozmernom priestore), ktorá spĺňa isté podmienky (pozri v dodatkoch). Pri úvodných úvahách vystačíme s konštatovaním, že vektorovej veličine vieme okrem veľkosti priradiť aj smer v priestore, pričom budeme využívať geometrický model vektora ako orientovanej úsečky.

Vektory zapisujeme tučnými písmenami, napr. ***a***, ***E***, ***ρ***, alebo ich označujeme šípkou nad písmenom: $\vec{b}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$. Značky všetkých veličín, teda aj vektorových, sa podľa medzinárodnej normy ISO 31-0 majú písať ležatým písmom - kurzívou.

Veľkosť vektorových veličín označujeme jednoduchými písmenami (nie tučnými, resp. bez šípky nad písmenom): *b*, *E*, *B*, alebo sa vektor vloží medzi značky vyjadrujúce absolútnu hodnotu: $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{E}|$. Preto sa pre veľkosť vektora používa aj nie práve najvhodnejšie pomenovanie **absolútna hodnota**; veľkosť je vždy nezáporná.

Graficky sa vektorové veličiny **znázorňujú** orientovanou úsečkou, so šípkou na jednom konci úsečky. Ak vektor smeruje k nám, tak sa zobrazuje krúžkom s bodkou v strede kruhu, ak od nás, tak krúžkom s krížikom.

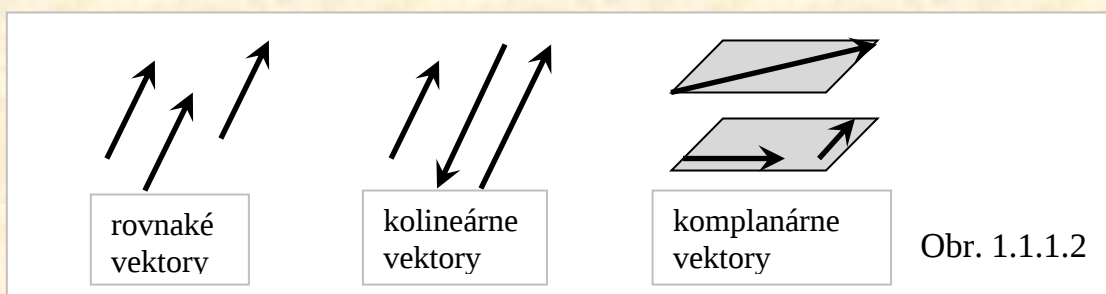


Obr. 1.1.1.1

Miesto na úsečke opatrené šípkou sa považuje za "**koniec vektora**", na opačnej strane úsečky je "**začiatok vektora**".

Vektory rovnobežné s jednou priamkou nazývame **kolineárne**. Aspoň tri rôznobežné vektory a rovnobežné s jednou rovinou, sú **komplanárne**. Kolineárne vektory môžu mať rovnaký, alebo navzájom opačný smer.

Dva vektory považujeme za rovnaké, ak majú rovnaký smer a rovnakú veľkosť (sú teda kolineárne) .



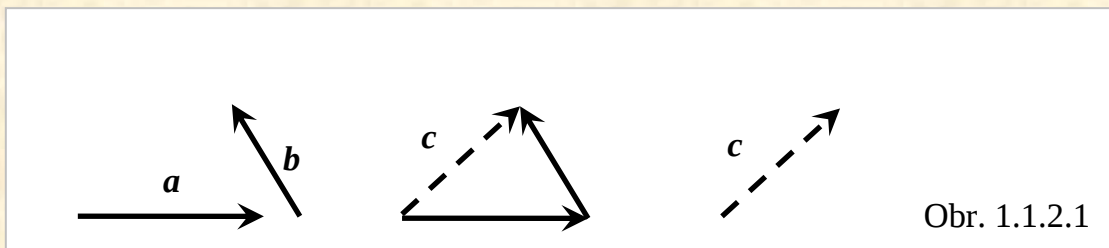
Obr. 1.1.1.2

Kontrolné otázky

1. Ako označujeme vektory a ako ich veľkosti?
2. Čo je absolútna hodnota vektora?
3. Sú rovnaké také dva vektory, ktoré majú rovnakú veľkosť a rovnaký smer, ale nemajú spoločný začiatkový bod?
4. Dva rovnobežné vektory majú vzájomne opačný smer. Sú kolineárne?
5. Kedy sú vektory komplanárne?
6. Možno o dvoch rovnobežných vektoroch tvrdiť že sú komplanárne?

1.1.2 Súčet a rozdiel vektorov

Súčet dvoch vektorov a , b je operácia, ktorej výsledkom je opäť vektor, ktorý označíme písmenom c , čo zapisujeme $a + b = c$. Graficky sa znázorňuje pomocou úsečiek zobrazujúcich vektory: ku koncu prvého vektora pripojíme druhý vektor, pričom začiatok výsledného vektora je zhodný so začiatkom prvého vektora a koniec s koncom druhého vektora. V grafickom znázornení:



Analogicky sa pokračuje pri sčítaní viacerých vektorov.

Súčet vektorov je **komutatívna operácia**, čiže výsledok súčtu nezávisí od poradia skladania vektorov:

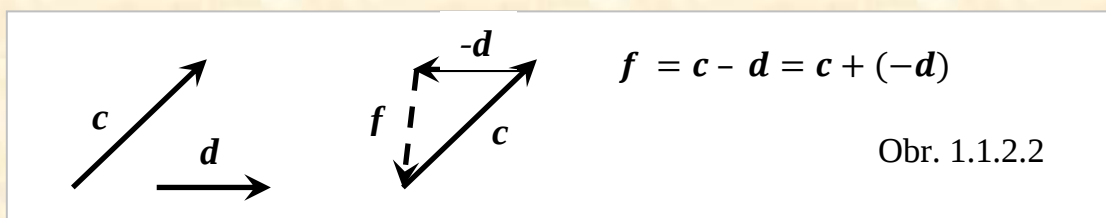
$$a + b = b + a . \quad (1.1.2.1)$$

Pri sčítaní viacerých vektorov sa uplatňuje **asociatívnosť**, ktorú v prípade troch vektorov možno vyjadriť vzt'ahom

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) . \quad (1.1.2.2)$$

Ak pred vektor napíšeme **znamienko "mínus"**, napríklad $-a$, podľa zaužívanej dohody to predstavuje vektor, ktorý má rovnakú veľkosť ako vektor a , ale má opačný smer. Nový vektor možno označiť ako vektor b , a zapísať rovnosť $b = -a$. Vektory a, b sú teda kolíneárne.

Takéto označenie umožňuje zaviesť **odčítanie (rozdiel) vektorov**. Rozdiel dvoch vektorov $c - d = f$ chápeme ako súčet vektorov c a $(-d)$, t.j. $f = c + (-d)$. Pritom rovnicu $c - d = f$ možno upraviť rovnako, ako rovnicu s obyčajnými číslami, napríklad vektor d previesť na pravú stranu rovnice: $c = d + f$. Takto upravená rovnica môže poslúžiť na overenie správnosti vykonanej operácie.



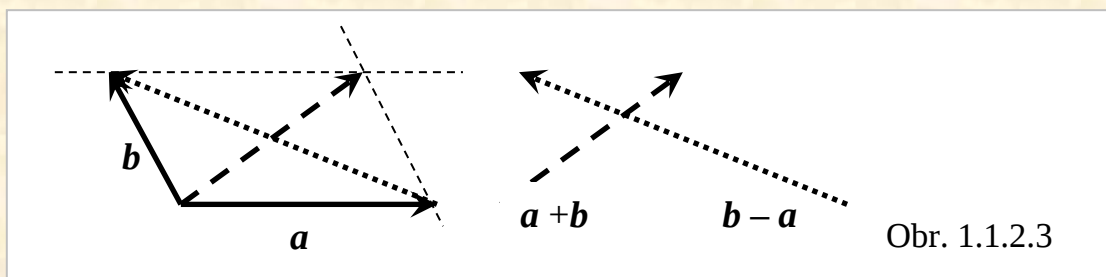
Súčet vektorov má časté uplatnenie v praxi. Napríklad sčítaním vektora rýchlosti lode vzhľadom na vodu s vektorom rýchlosti vody v rieke, dostaneme vektor rýchlosti lode vzhľadom na breh rieky.

Na súde vektorov si možno názorne ukázať význam používania vektorového označovania. Ak pri súde dvoch vektorov platí rovnosť $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$, kde $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ nie sú kolineárne vektory, potom pre ich veľkosti platí trojuholníková nerovnosť $a + b > c$.

Ak vynecháme označenie vektorov, napíšeme nesprávnu rovnicu $a + b = c$. **Dôsledné označovanie vektorov je preto dôležité.** Aby sa bezpečnejšie rozlíšil zápis vektora od jeho veľkosti, v mnohých učebných textoch sa vektory označujú šípkou nad písmenom. V medzinárodných normách sa však na označenie vektorov používa tučné písmo.

Príklad 1.1.2.1 Dva nekolineárne vektory, napr. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, môžeme chápať ako strany rovnobežníka. Graficky ukážte, že ich súčet a rozdiel predstavujú uhlopriečky tohto rovnobežníka.

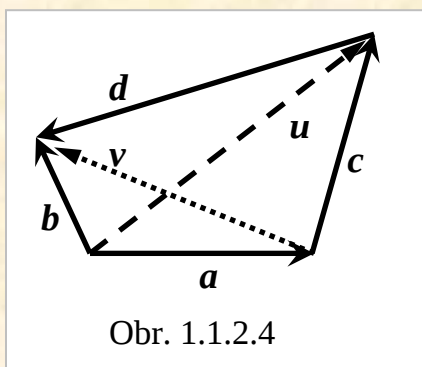
Riešenie:



Obr. 1.1.2.3

Príklad 1.1.2.2 Nakreslite štvoruholník, ktorého strany nie sú rovnako dlhé. Dokážte, že ak by sa uhlopriečky štvoruholníka pretínali vo svojich stredoch, musel by to byť rovnobežník. (Obr. 1.1.2.4)

Riešenie: Najprv treba označiť všetky štyri strany štvoruholníka ako vektory. Podľa



Obr. 1.1.2.4

obrázku dokážeme určiť vektory smerujúce do stredov uhlopriečok. Do stredu uhlopriečky $\mathbf{u}$ smeruje vektor $\mathbf{p} = (1/2)\mathbf{u} = (1/2)(\mathbf{a} + \mathbf{c})$ a do stredu uhlopriečky $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{q} = \mathbf{a} + (1/2)(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1/2)(\mathbf{a} + \mathbf{b})$. Ak majú byť stredy uhlopriečok totožné, musia byť vektory $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ rovnaké: $(1/2)(\mathbf{a} + \mathbf{c}) = (1/2)(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, z čoho vyplýva rovnosť vektorov $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$. Majú teda rovnakú veľkosť aj smer, preto sú rovnobežné, tvoria dve strany rovnobežníka. Výsledok pre ďalšie dve

strany získame úvahou o vektore $\mathbf{u}$.

Platí $\mathbf{u} = \mathbf{c} + \mathbf{a}$ a súčasne $\mathbf{u} + \mathbf{d} = \mathbf{b}$, čiže $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{d}$ a s využitím rovnosti $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ aj $\mathbf{u} = \mathbf{c} - \mathbf{d}$. Porovnaním dvoch vyjadrení vektora $\mathbf{u}$ dospejeme k výsledku $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$. Teda aj tieto vektory sú rovnobežné, majú rovnakú veľkosť, ale opačný smer.

Kontrolné otázky

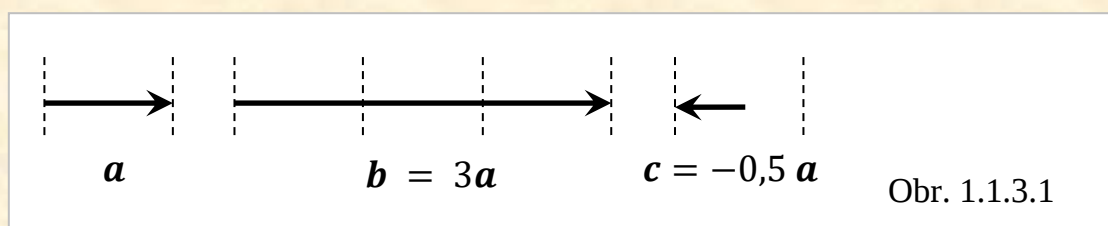
1. Slovné vyjadrite postup pri grafickom sčítaní dvoch vektorov.
2. Oplyvní záměna poradia vektorov pri súčte výsledok?
3. Je sčítanie dvoch vektorov komutatívna operácia?
4. Je sčítanie viacerých vektorov asociatívna operácia?
5. Na príklade názorne vysvetlite asociatívnosť súčtu vektorov.
6. Čo znamená znamienko mínus pred vektorom?
7. Ako je definované odčítanie dvoch vektorov?
8. K akým dôsledkom môže viesť nepoužívanie označenia vektorov?
9. Uved'te príklad z praxe na sčítanie vektorov.

1.1.3 Skalárny násobok vektora, jednotkový vektor

Násobenie vektora číslom je definované ako operácia, ktorá poskytne nový vektor so zmenenou veľkosťou, ale kolíneárny s pôvodným vektorom. Napríklad vynásobením vektora $\mathbf{a}$ číslom 3 získame vektor $\mathbf{b}$ s trojnásobnou veľkosťou a nezmeneným smerom. Ak však vektor $\mathbf{a}$ budeme násobiť číslom $-0,5$, dostaneme vektor $\mathbf{c}$ s polovičnou veľkosťou, navyše s opačným smerom. Je to ďalšie pravidlo vektorovej algebry. Všeobecne sa tento vzťah zapisuje v tvare

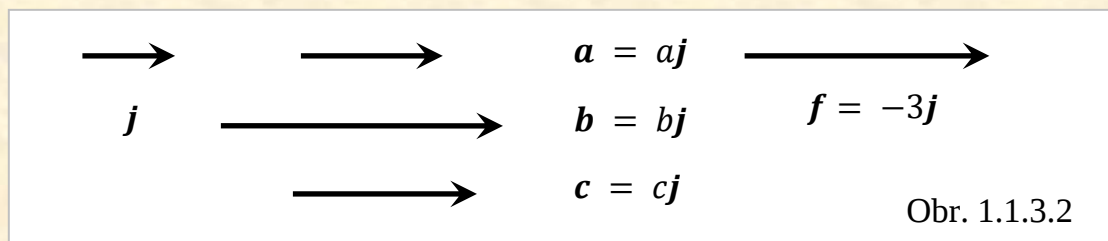
$$\mathbf{b} = s\mathbf{a}, \quad (1.1.3.1)$$

kde s môže predstavovať nie iba bezrozmerné číslo, ale aj skalárnu veličinu. Napríklad v kinematike sa stretneme s výrazom $\mathbf{a}t$, teda súčinom vektora zrýchlenia a času. Tak dostaneme novú fyzikálnu veličinu, ktorej veľkosť a fyzikálny rozmer sú súčinom veľkostí, resp. rozmerov vektorovej a skalárnej veličiny. Takáto operácia sa nazýva **skalárny násobok vektora**.



Obr. 1.1.3.1

Jednotkový vektor má veľkosť rovnajúcu sa číslu 1, je bezrozmerový. S výhodou ho možno použiť na vyjadrenie iných vektorov, ktoré sú s ním rovnobežné. Nech $\mathbf{j}$ je jednotkový vektor, a nech vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sú s ním súhlasne rovnobežné. Takéto vektory možno vyjadriť ako skalárne násobky jednotkového vektora, pričom skalármi, ktorými jednotkový vektor násobíme, sú veľkosti týchto vektorov: $\mathbf{a} = a\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = b\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = c\mathbf{j}$. Ak niektorý z vektorov má opačný smer ako jednotkový vektor, vtedy pred skalárny násobok vektora $\mathbf{j}$ treba pripísať znamienko mínus, napr. $\mathbf{f} = -3\mathbf{j}$. (Pozri ďalej - rozklad vektora, súradnice vektora).

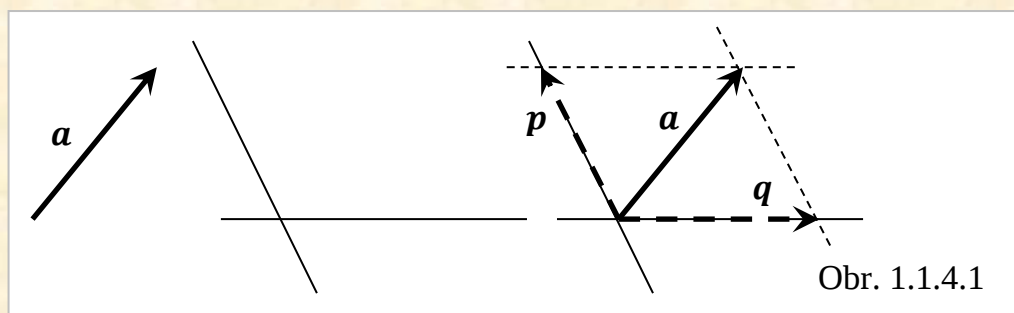


Kontrolné otázky

1. Ako možno z daného vektora vytvoriť vektor opačného smeru, navyše s päťnásobnou veľkosťou? Ako sa príslušná operácia nazýva?
2. Aké vlastnosti má jednotkový vektor?
3. Získame súčtom dvoch vzájomne kolmých jednotkových vektorov opäť jednotkový vektor?

1.1.4 Zložky a súradnice vektora

Rozklad vektora na zložky je opačná operácia ako súčet vektorov. V rovine možno vektor rozložiť na dve zložky, t.j. na dva vektory do vopred určených smerov. Sčítaním zložiek vznikne pôvodný vektor. Na obr. 1.1.4.1 je znázornený rozklad vektora $\mathbf{a}$ do smerov naznačených dvomi priamkami. Uskutočňuje sa tak, že priamky, do smerov ktorých treba vektor rozložiť, vedieme koncovým aj začiatočným bodom vektora. Vznikne rovnobežník, na ktorom už jednoducho vyznačíme zložky $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$.



V priamkach, do ktorých rozkladáme vektor $\mathbf{a}$, môžeme zvoliť jednotkové vektory, ktoré označíme $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$. Jednotkovými vektormi sú potom určené príslušné smery. Zložky $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ vyjadríme ako skalárne násobky vektorov $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$: $\mathbf{p} = a_p \mathbf{e}_1$, $\mathbf{q} = a_q \mathbf{e}_2$. Vektor $\mathbf{e}_1$ však môže mať opačný smer ako zložka $\mathbf{p}$, a vtedy skalár a_p pred vektorom $\mathbf{e}_1$ musí byť záporný. Preto skalár a_p nepredstavuje veľkosť vektora $\mathbf{p}$, ale je jednou zo súradníc rozloženého vektora $\mathbf{a}$ vo vzt'aznej sústave určenej vektormi $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$. Vektor $\mathbf{a}$ možno po takomto rozklade na zložky vyjadriť v tvare

$$\mathbf{a} = \mathbf{p} + \mathbf{q} = a_p \mathbf{e}_1 + a_q \mathbf{e}_2. \quad (1.1.4.1)$$

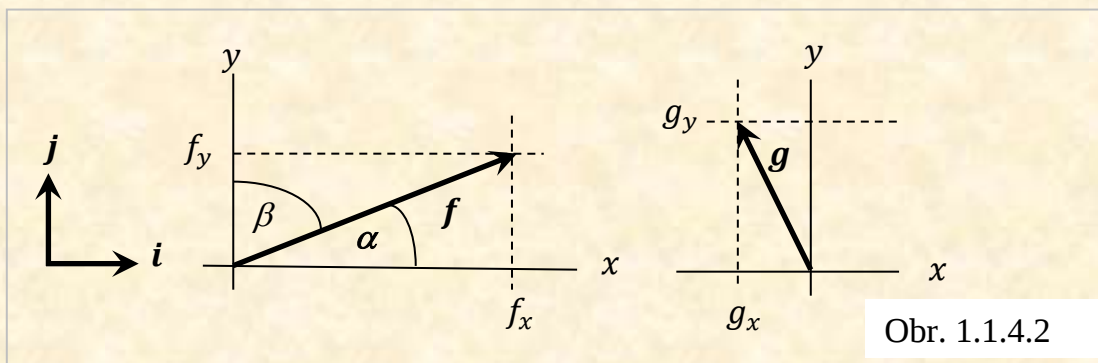
pričom hovoríme, že vektor $\mathbf{a}$ je **lineárnou kombináciou vektorov** $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$.

V trojrozmernom priestore musí byť vzt'azná sústava určená tromi vektormi $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ a $\mathbf{e}_3$ o ktorých hovoríme, že tvoria jej **bázu**. Vo všeobecnosti to ani nemusia byť jednotkové vektory. Najčastejšie sa však používa rozklad do troch navzájom kolmých smerov, určených jednotkovými vektormi so zaužívaným označením $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Tieto vektory potom vyznačujú smery súradnicových osí x, y, z pravouhlej (karteziánskej) súradnicovej sústavy. Ľubovoľný vektor $\mathbf{f}$ možno pomocou takejto trojice jednotkových vektorov vyjadriť ako ich lineárnu kombináciu

$$\mathbf{f} = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k}. \quad (1.1.4.2)$$

V tomto vyjadrení vektora $\mathbf{f}$ sú f_x, f_y, f_z jeho **súradnice**, ktoré môžu byť kladné, i záporné podľa toho, aký je jeho smer vzhľadom na jednotkové vektory.

Na obr. 1.1.4.2 je znázornený dvojrozmerný prípad, pričom vektor $\mathbf{g}$ má zápornú súradnicu g_x , ostatné súradnice vektorov $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$ sú kladné.



Veľkosť vektora $\mathbf{f}$ možno v karteziánskej súradnicovej sústave vyjadriť pomocou jeho súradníc (použitím Pythagorovej vety):

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}. \quad (1.1.4.3)$$

Vektor $\mathbf{f}$ zviera s vektormi $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ **smerové uhly** α, β, γ , pre ktoré platia vzťahy

$$\cos \alpha = \frac{f_x}{f}, \quad \cos \beta = \frac{f_y}{f}, \quad \cos \gamma = \frac{f_z}{f}, \quad (1.1.4.4)$$

čo si možno overiť na dvojrozmernom obrázku 1.1.4.2 .

Zo vzťahov (1.1.4.4) pre kosínusy smerových uhlov (**smerové kosínusy**) bezprostredne vyplýva rovnosť

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 . \quad (1.1.4.5)$$

Súčet vektorov a skalárny násobok vektora možno výhodne vypočítať, keď vektory vyjadríme **v zložkovom tvare**. Napríklad ak $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$ potom môžeme ich súčet uskutočniť po zložkách, na základe platnosti komutatívnosti a asociatívnosti sčítania vektorov:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k} , \quad (1.1.4.6)$$

takže pre súradnice výsledného vektora $\mathbf{c}$ platí

$$c_x = a_x + b_x , \quad c_y = a_y + b_y , \quad c_z = a_z + b_z . \quad (1.1.4.7)$$

Pre **skalárny násobok** vektora vyjadreného v zložkách platí:

$$\mathbf{d} = s\mathbf{a} = s(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) = sa_x \mathbf{i} + sa_y \mathbf{j} + sa_z \mathbf{k} ,$$

pričom pre jeho súradnice platí

$$d_x = sa_x , \quad d_y = sa_y , \quad d_z = sa_z . \quad (1.1.4.8)$$

Príklad 1.1.4.1 Vypočítajte súčet vektorov $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 1\mathbf{k}$ a $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Riešenie: $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (3 - 1)\mathbf{i} + (2 + 2)\mathbf{j} + (-1 - 2)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$,
takže súradnice vektora $\mathbf{c}$ sú: $c_x = 2$, $c_y = 4$, $c_z = -3$.

Príklad 1.1.4.2 Vyjadrite vektor $\mathbf{d}$, ktorý má trojnásobnú veľkosť a opačný smer ako vektor $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Riešenie: $\mathbf{d} = (-3)\mathbf{a} = (-3)(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = -9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Presvedčte sa, že veľkosť vektora $\mathbf{d}$ je naozaj trojnásobná v porovnaní s veľkosťou vektora $\mathbf{a}$.

Kontrolné otázky

1. Ako rozkladáme vektor (v rovine) do dvoch vopred zadaných smerov?
2. Možno vektor rozložiť do dvoch smerov, ktoré zvierajú uhol väčší než 90° ?
3. Uved'te čo rozumieme pod lineárnou kombináciou vektorov.
4. Uved'te, čo je báza vektorov.
5. Ako sa vypočíta veľkosť vektora, keď sú známe jeho súradnice?
6. Ako sa zmenia zložky vektora, keď ho vynásobíme skalárom?
7. Ako sa zmenia súradnice vektora keď ho vynásobíme skalárom?
8. Vyjadrite súčet dvoch vektorov pomocou ich súradníc.
9. Uved'te, ako vypočítate uhol ktorý vektor zvierá s osou y , keď poznáte jeho súradnice.

1.2 Súčiny medzi vektormi

Kľúčové slová

Skalárny súčin, vektorový súčin, zmiešaný súčin, dvojnásobný vektorový súčin.

1.2.1 Skalárny súčin

Vektorová algebra popri násobení vektorov skalármi definuje dva druhy súčinov medzi dvoma vektormi.

Skalárny súčin dvoch vektorov je zavedený ako operácia, ktorej výsledkom je skalárna veličina. Hodnota tejto skalárnej veličiny je určená súčinom veľkostí príslušných vektorov a kosínusu uhla, ktorý tieto vektory zvierajú. Fyzikálny rozmer výslednej skalárnej veličiny sa rovná súčinu rozmerov násobených vektorových veličín. Skalárny súčin sa označuje bodkou medzi vektormi v strede výšky písmen (nie na úrovni riadku):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \alpha . \quad (1.2.1.1)$$

Pritom **uhol medzi dvoma vektormi** sa určuje tak, aby nebol väčší ako π radiánov (180°). Bezpečne ho určíme tak, keď oba vektory nakreslíme so spoločným začiatkom.

Niektoré vlastnosti skalárneho súčinu

- Skalárny súčin je komutatívna operácia, čo vyplýva bezprostredne z definície:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} . \quad (1.2.1.2)$$

- Výsledkom skalárneho súčinu môže byť kladná i záporná skalárna veličina, čo závisí od hodnoty uhla medzi vektormi. Ak je uhol medzi vektormi menší než $\pi/2$, skalárny súčin je kladný, lebo kosínus ostrého uhla je kladný. Pri uhle väčšom než $\pi/2$, je kosínus uhla, a teda aj skalárny súčin, záporný.
- Ak sa skalárny súčin dvoch vektorov rovná nule, pričom ani jeden z vektorov nemá nulovú veľkosť, vektory sú na seba kolmé, lebo $\cos(\pi/2) = 0$.
- Skalárny súčin vektora so sebou samým: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = aa \cos(0) = a^2$. V tomto prípade sa používa aj označenie $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$.
- Pre skalárne súčiny medzi jednotkovými vektormi $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ karteziánskej súradnicovej sústavy platia vzťahy

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 . \quad (1.2.1.3)$$

- Pre skalárny súčin platí distributívny zákon:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} , \quad (1.2.1.4)$$

alebo všeobecnejšie:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_p) \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_q) &= \\ &= a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2 + \dots + a_1 \cdot b_q + \dots + a_p \cdot b_q \end{aligned}$$

- Skalárny súčin vektorov vyjadrených pomocou súradníc, teda ako lineárna kombinácia vektorov $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, možno vypočítať s využitím distributívneho zákona takto:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (1.2.1.5)$$

napríklad $(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = -3 + 4 + 2 = 3$.

- Z definície skalárneho súčinu vyplýva vzťah

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \alpha = \cos \alpha \sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}, \quad (1.2.1.6)$$

takže porovnaním (1.2.1.5) a (1.2.1.6) môžeme získať vzorec na výpočet (kosínusu) uhla medzi vektormi:

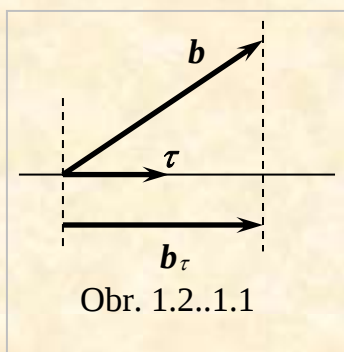
$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}. \quad (1.2.1.7)$$

- Skalárny súčin možno využiť na výpočet súradnice vektora v karteziánskej sústave, ak vektor vynásobíme príslušným jednotkovým vektorom. Použitím distributívneho zákona a vzťahov (1.2.1.3) dostaneme napr.: $\mathbf{j} \cdot (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) = a_y$. Podobne získame ostatné súradnice, takže platí:

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}, \quad a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}, \quad a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}. \quad (1.2.1.8)$$

- Pomocou týchto vzťahov možno vytvoriť zložky vektora $\mathbf{a}$ v smere súradnicových osí v karteziánskej sústave, t.j. rozložiť ho na tieto zložky. Ide vlastne o ortogonálne priemety $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$ a $\mathbf{u}$ vektora $\mathbf{a}$ do smerov súradnicových osí, t.j. do smerov určených jednotkovými vektormi $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Platí pre ne:

$$\mathbf{s} = a_x \mathbf{i} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i}, \quad \mathbf{t} = a_y \mathbf{j} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j}, \quad \mathbf{u} = a_z \mathbf{k} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}. \quad (1.2.1.9)$$

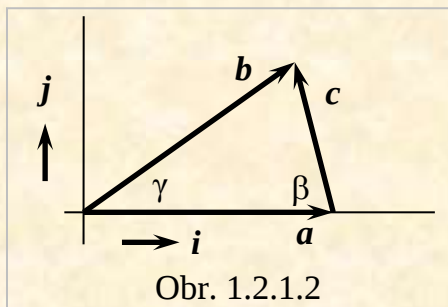


Tento postup môže poslúžiť aj pri vytváraní ortogonálneho **priemetu vektora** do ľubovoľného smeru v priestore, určeného jednotkovým vektorom. Napríklad priemet $\mathbf{b}_\tau$ vektora $\mathbf{b}$ do smeru jednotkového vektora $\boldsymbol{\tau}$ (obr. 1.2.1.1) získame tak, že vypočítame ich skalárny súčin a takto získaným skalárom vynásobíme vektor $\boldsymbol{\tau}$:

$$\mathbf{b}_\tau = (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} = b \cdot 1 \cdot \cos \delta \boldsymbol{\tau} . \quad (1.2.1.10)$$

Skalárny súčin sa často využíva v mechanike a v teórii elektromagnetického poľa. Napríklad skalárnym súčinom vektora sily $\mathbf{F}$ a vektora elementárneho posunutia $d\mathbf{r}$ sa vyjadruje elementárna práca $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F dr \cos \alpha$, lebo smer sily a smer posunutia telesa nemusia byť rovnaké. Vtedy sa na konanie práce využíva iba priemet sily do smeru posunutia, vyjadrený ako $F \cos \alpha$.

Príklad 1.2.1.1 Na obr.1.2.1.2 je znázornený trojuholník určený vektormi $\mathbf{a} = 5\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Vypočítajte uhly medzi stranami $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a stranami $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$.



Obr. 1.2.1.2

Riešenie: Na výpočet použijeme vzťah (1.2.1.7):

$$\cos \gamma = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2)(b_x^2 + b_y^2)}} = \frac{20}{\sqrt{25}\sqrt{16+9}} = \frac{4}{5},$$

čiže $\gamma = 36,9^\circ$. Na výpočet uhla β potrebujeme vyjadriť vektor $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ a opäť použiť vzťah (1.2.1.7). Musíme si však uvedomiť, že vektor

$\mathbf{a}$ s vektorom $\mathbf{c}$ zvierajú uhol $\varphi = 180^\circ - \beta$. Tak dostaneme: $\cos \varphi = -1/\sqrt{10}$, čiže $\varphi = 108,43^\circ$.

Kontrolné otázky

1. Poznáme veľkosť dvoch vektorov a uhol medzi nimi. Ako vtedy vyjadríte ich skalárny súčin?
2. Aká je dohoda o maximálnej hodnote uhla medzi dvomi vektormi?
3. Kedy je skalárny súčin dvoch vektorov záporný?
4. Čomu sa rovná skalárny súčin vzájomne kolmých vektorov?
5. Uvedte, čomu sa rovnajú skalárne súčiny $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}$ a $\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}$.
6. Viete vyjadriť skalárny súčin dvoch vektorov, ak poznáte ich súradnice v kartézianskej sústave?
7. Ako vyjadrujeme distributívnosť skalárneho súčinu?
8. Ako možno pomocou skalárneho súčinu vypočítať uhol medzi dvoma vektormi?
9. Čo rozumieme pod priemetom vektora do iného, s ním nekolineárneho vektora?
10. Čo predstavuje priemet vektora do jednotkového vektora v smere súradnicovej osi?

1.2.2 Vektorový súčin

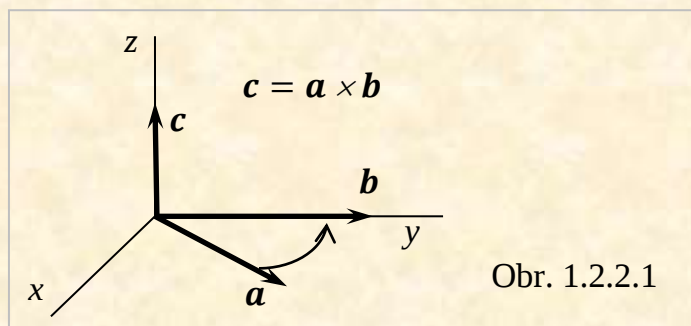
Vektorový súčin dvoch vektorov je zavedený ako operácia, ktorej výsledkom je vektor. Preto treba definovať nie iba **veľkosť**, ale aj **smer** výsledného vektora. Vektorový súčin sa označuje krížikom medzi vektormi:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} . \quad (1.2.2.1)$$

Veľkosť c výsledného vektora $\mathbf{c}$ je definovaná ako súčin veľkostí násobených vektorov a sínusu uhla nimi zovretého

$$c = ab \sin \alpha . \quad (1.2.2.2)$$

Pre smer vektora $\mathbf{c}$ platí definícia, že je kolmý na rovinu násobených vektorov. Jednoznačnosť definície však vyžaduje určiť, na ktorú stranu roviny smeruje. Vektor $\mathbf{c}$ má taký smer, že z jeho konca sa stotožnenie prvého vektora zo súčinu (v tomto prípade vektora $\mathbf{a}$) s druhým vektorom po kratšom oblúku javí ako pohyb proti chodu hodinových ručičiek. O trojici vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ v danom poradí potom hovoríme, že tvoria **pravotočivú sústavu vektorov**. Zmena ich poradia jednou permutáciou znamená zmenu z pravotočivej na ľavotočivú sústavu (trojicu).



Na obr. 1.2.2.1 je znázornená trojica vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Pre názornosť sú nakreslené aj súradnicové osi karteziánskej sústavy, vektor $\mathbf{a}$ leží v rovine (x, y) . Vektor $\mathbf{a}$ budeme otáčať smerom k vektoru $\mathbf{b}$ po kratšom oblúku. Ak rovnako budeme otáčať pravotočivú skrutku umiestnenú v začiatku súradnicovej sústavy – kolmo na rovinu vektorov $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ – skrutka sa bude posúvať v smere vektora $\mathbf{c}$. Aj tento model pomáha pri určovaní smeru vektora, ktorý je výsledkom vektorového súčinu.

Niektoré vlastnosti vektorového súčinu

- Vektorový súčin nie je komutatívna operácia, lebo zámena poradia vektorov poskytuje síce vektor rovnako veľký, ale opačného smeru. Táto skutočnosť sa zapisuje v tvare

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = - \mathbf{b} \times \mathbf{a} . \quad (1.2.2.3)$$

- Veľkosť vektorového súčinu dvoch vektorov možno interpretovať ako plošný obsah rovnobežníka vytvoreného týmito vektormi. Navyše výsledný vektor určuje orientáciu roviny v priestore, preto ho možno chápať ako vektor priradený ploche.

- Z definície veľkosti vektorového súčinu vyplýva, že vektorový súčin dvoch kolineárnych vektorov (zvierajú uhol 0° alebo 180°) je nulový vektor.
- Pre jednotkové vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, ktoré sú navzájom na seba kolmé a tvoria pravotočivú sústavu, platia vzťahy:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= 0 & \mathbf{j} \times \mathbf{j} &= 0 & \mathbf{k} \times \mathbf{k} &= 0 \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} & \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j}. \end{aligned} \quad (1.2.2.4)$$

- Pre vektorový súčin platí distributívny zákon:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}, \quad (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}. \quad (1.2.2.5)$$

Dva prípady distributívneho zákona sú uvedené preto, lebo vo vektorovom súčine nemožno zamieňať poradie vektorov bez zmeny znamienka.

- Na základe distributívneho zákona vektorový súčin dvoch vektorov zapísaných v zložkovom tvare môžeme vyjadriť takto (sústava vektorov $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ je pravotočivá):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = \\ &= a_x b_x (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + a_x b_y (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + a_x b_z (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + \\ &+ a_y b_x (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + a_y b_y (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + a_y b_z (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + \\ &+ a_z b_x (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + a_z b_y (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + a_z b_z (\mathbf{k} \times \mathbf{k}) = \\ &= 0 + a_x b_y \mathbf{k} - a_x b_z \mathbf{j} + \\ &- a_y b_x \mathbf{k} + 0 + a_y b_z \mathbf{i} + \\ &+ a_z b_x \mathbf{j} - a_z b_y \mathbf{i} + 0 = \\ &= \mathbf{i} (a_y b_z - a_z b_y) + \mathbf{j} (a_z b_x - a_x b_z) + \mathbf{k} (a_x b_y - a_y b_x). \end{aligned} \quad (1.2.2.6)$$

Čitateľovi, ktorý pozná determinanty je zrejmé, že posledný výraz možno formálne vyjadriť ako determinant:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1.2.2.7)$$

S vektorovým súčinom sa stretneme napríklad pri vyjadrení momentu sily $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, kde $\mathbf{r}$ je polohový vektor pôsobiska sily $\mathbf{F}$, alebo pri vzťahu pre silu $\mathbf{F}$ pôsobiacu na elektrický náboj Q pohybujúci sa v magnetickom poli s magnetickou indukciou $\mathbf{B}$: $\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Príklad 1.2.2.1 Vypočítajte plošný obsah trojuholníka určeného vektormi $\mathbf{a} = 5\mathbf{i}$ a $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. (Pozri obrázok v príklade 1.2.1.1.)

Riešenie: Veľkosť vektorového súčinu $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ predstavuje plošný obsah rovnobežníka vytvoreného pomocou týchto vektorov, teda dvojnásobok plošného obsahu trojuholníka. Mohli by sme postupovať tak, že vypočítame veľkosti vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ a uhol medzi nimi (pomocou vzorca (1.2.1.7)), vypočítame veľkosť vektorového súčinu $ab \sin \alpha$ a vydělíme ho dvomi. Pri šikovnejšom postupe najprv vypočítame výsledný vektor $\mathbf{u} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$\mathbf{u} = (5\mathbf{i}) \times (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = (5 \cdot 4)(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + (5 \cdot 3)(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = 15\mathbf{k},$$

a z výsledku bezprostredne vidíme, že veľkosť vektora $\mathbf{u}$ je 15. Preto plošný obsah trojuholníka je 7,5 jednotiek.

Príklad 1.2.2.2 Vypočítajte skalárny násobok vektorového súčinu vektorov $\mathbf{a} = 5\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ z príkladu (1.2.2.1) skalárom $p = 2$.

Riešenie: $p\mathbf{c} = p(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = p[(5\mathbf{i}) \times (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j})] = p(15\mathbf{k}) = 30\mathbf{k}$.

Poznámka Rovnaký výsledok dostaneme, ak skalárom p vynásobíme niektorý z vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ešte pred uskutočnením vektorového súčinu:

a) $p\mathbf{c} = p(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (p\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = (10\mathbf{i}) \times (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = 30\mathbf{k}$,

b) $p\mathbf{c} = p(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (p\mathbf{b}) = (5\mathbf{i}) \times (8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) = 30\mathbf{k}$.

Z výsledku vyplýva významné pravidlo, že nezáleží na tom, ktorému z vektorov vektorového súčinu priradíme skalár, ktorým vektorový súčin násobíme. Skalár teda môžeme posunúť na ľubovoľné miesto v súčine: $p(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (p\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (p\mathbf{b})$.

Príklad 1.2.2.3 V pravouhlej súradnicovej sústave sú dané tri body $A(2,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,3)$, ktorými je určená rovina. Vyjadrite jednotkový vektor kolmý na túto rovinu. Nakreslite si obrázok!

Riešenie: Základnou myšlienkou riešenia je využitie vektorového súčinu dvoch vektorov ležiacich v tejto rovine, lebo výsledkom ich súčinu je vektor kolmý na túto rovinu. Pomocou súradníc zadaných bodov skonštruujeme dva takéto vektory. Získame ich ako rozdiel vektorov spájajúcich začiatok súradnicovej sústavy so zadanými bodmi. Do bodu A smeruje vektor $\mathbf{a} = 2\mathbf{i}$, do ďalších bodov vektory $\mathbf{b} = \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{k}$. Vektor $\mathbf{u}$ vychádzajúci z bodu A a končiaci v bode B vyjadríme ako rozdiel vektorov $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{j} - 2\mathbf{i}$, vektor vychádzajúci z bodu A a končiaci v bode C je $\mathbf{w} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = 3\mathbf{k} - 2\mathbf{i}$. Potom vypočítame vektorový súčin týchto vektorov: $\mathbf{h} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} = (\mathbf{j} - 2\mathbf{i}) \times (3\mathbf{k} - 2\mathbf{i}) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{k} + 6\mathbf{j}$. Výsledný vektor $\mathbf{h}$ je kolmý na rovinu prechádzajúcu bodmi A, B, C . Jednotkový vektor kolmý na túto rovinu získame, ak vektor $\mathbf{h}$ vydělíme jeho veľkosťou:

$$h = (3^2 + 2^2 + 6^2)^{1/2} = (49)^{1/2} = 7. \text{ Pre jednotkový vektor tak dostaneme:}$$

$$\mathbf{h}_o = \mathbf{h} / 7 = (3/7)\mathbf{i} + (2/7)\mathbf{j} + (6/7)\mathbf{k}.$$

Kontrolné otázky

1. Akú veľkosť má vektor, ktorý vznikne ako vektorový súčin dvoch vektorov?
2. Aký smer má vektor, ktorý vznikne ako vektorový súčin dvoch vektorov?
3. Čo znamená, ak trojica vektorov tvorí pravotočivú sústavu?
4. Ako vytvoríme z pravotočivej sústavy troch vektorov ľavotočivú sústavu?
5. Je vektorový súčin komutatívna operácia?
6. Aký je geometrický význam vektorového súčinu dvoch vektorov?
7. Dokážete vyjadriť všetky možné kombinácie vektorových súčinov medzi vektormi $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$?
8. Ako vyjadrujeme distributívnosť vektorového súčinu?
9. Vyjadrite vektorový súčin v tvare determinantu.
10. Pri násobení vektorového súčinu skalárom – možno vopred skalárom vynásobiť niektorý z vektorov súčinu?

1.2.3 Zmiešaný súčin

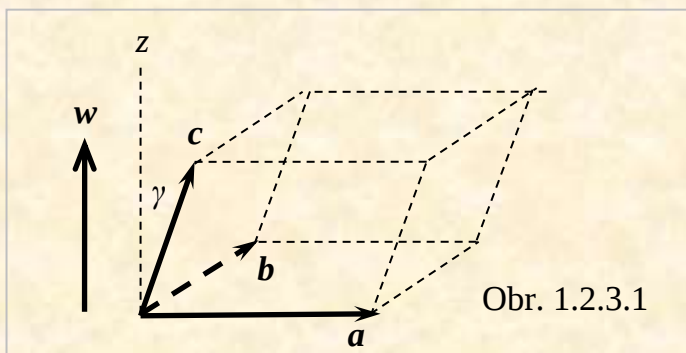
Zmiešaný súčin troch **vektorov** je operácia, v ktorej sa uskutoční najprv vektorový a po ňom skalárny súčin. Medzi tromi vektormi $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ je možných viacero variantov zmiešaného súčinu, napríklad:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}, \quad (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}. \quad (1.2.3.1)$$

Výsledkom je vždy skalárna veličina, ktorá môže byť kladná, nulová i záporná.

Niektoré **vlastnosti zmiešaného súčinu**.

- Výraz $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ je nekorektný, nemožno ho vypočítať, lebo výraz v zátvorke je skalárna veličina, ktorou nemožno vektor $\mathbf{c}$ násobiť vektorovo.



- Zmiešaný súčin má význam objemu rovnobežnostena vytvoreného z vektorov zmiešaného súčinu. Na obrázku je nakreslený rovnobežnosten zostrojený pomocou vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, ako aj priamka z kolmá na rovinu vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

- Zmiešaný súčin $S = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ vypočítame podľa pravidiel vektorového a skalárneho súčinu. Výsledkom vektorového súčinu $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ je vektor (označme ho $\mathbf{w}$)

kolmý na ich rovinu, teda vektor, ktorý má veľkosť $ab \sin \alpha$ a je rovnobežný s priamkou z (obr. 1.2.3.1). Vektor $\mathbf{w}$ zvierá s vektorom $\mathbf{c}$ uhol γ , ktorého kosínus vstupuje do výrazu pre skalárny súčin medzi vektormi $\mathbf{w}$ a $\mathbf{c}$. Ako výsledok zmiešaného súčinu tak dostaneme $S = (ab \sin \alpha) c \cos \gamma$. Výraz $c \cos \gamma$ predstavuje výšku rovnobežnostena, pričom $ab \sin \alpha$ je plošný obsah jeho základne. Preto zmiešaný súčin má význam objemu rovnobežnostena.

- Rovnaký výsledok dostaneme aj pomocou súčinov $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$ a $(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$, teda pomocou súčinov, v ktorých sme urobili cyklickú zmenu poradia vektorov, pri zachovaní polohy zátvoriek, ako aj značiek vektorového a skalárneho súčinu. Preto platia rovnosti

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}. \quad (1.2.3.2)$$

- Ak si uvedomíme komutatívnosť skalárneho súčinu, môžeme napísať rovnosť

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (1.2.3.3)$$

Porovnaním posledných členov rovností (1.2.3.2) a (1.2.3.3) dostaneme výsledok

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad (1.2.3.4)$$

ktorý interpretujeme ako možnosť premiestnenia zátvoriek, pri súčasnej výmene značiek vektorového a skalárneho súčinu.

- Zmiešaný súčin je kladný, ak vektory v zmiešanom súčine, v takom poradí ako sú napísané, tvoria pravotočivú sústavu. Výmenou poradia ľubovoľných dvoch vektorov v zmiešanom súčine zmení sa jeho znamienko. Ak je zmiešaný súčin záporný, objemu rovnobežnostena sa vtedy rovná jeho absolútna hodnota.
- Nulová hodnota zmiešaného súčinu znamená, že príslušné vektory sú komplanárne.
- Zmiešaný súčin možno vyjadriť pomocou determinantu, pričom v každom riadku sú súradnice jedného z vektorov. K tomuto tvrdeniu môžeme dospieť, keď si všimneme zápis vektorového súčinu pomocou vzťahov (1.2.2.5) a (1.2.2.6). Ak výraz (1.2.2.5) skalárne vynásobíme vektorom $\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}$, dostaneme

$$\begin{aligned} & (c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}) \cdot [\mathbf{i} (a_y b_z - a_z b_y) + \mathbf{j} (a_z b_x - a_x b_z) + \\ & \mathbf{k} (a_x b_y - a_y b_x)] = \\ & = c_x (a_y b_z - a_z b_y) + c_y (a_z b_x - a_x b_z) + c_z (a_x b_y - a_y b_x), \end{aligned}$$

takže je zrejmé, že tento zmiešaný súčin možno vyjadriť ako determinant

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (1.2.3.5)$$

Pomocou zápisu zmiešaného súčinu v tvare determinantu možno overiť pravidlo o cyklickej zámene poradia vektorov, ako aj o zmene znamienka pri zámene poradia dvoch vektorov. Zámena poradia dvoch vektorov sa v determinante prejaví ako zámena dvoch riadkov, ktorej dôsledkom je zmena znamienka determinantu.

Príklad 1.2.3.1 Vypočítajte zmiešaný súčin $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ pričom vektory sú dané v zložkovom tvare: $\mathbf{a} = 5\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Overte si, že rovnaký výsledok dostanete, ak v zmiešanom súčine urobíte cyklickú zmenu poradia vektorov.

Riešenie: Výpočtom vektorového súčinu sa presvedčíme, že $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 15\mathbf{k}$. Výsledok vynásobíme skalárne vektorom $\mathbf{c}$: $(15\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) = 15$.

Pre zmiešaný súčin $(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ dostaneme rovnaký výsledok:

$$(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (5\mathbf{i}) = 5\mathbf{k} + 5\mathbf{j} \text{ a ďalej } (5\mathbf{k} + 5\mathbf{j}) \cdot (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = 15.$$

Kontrolné otázky

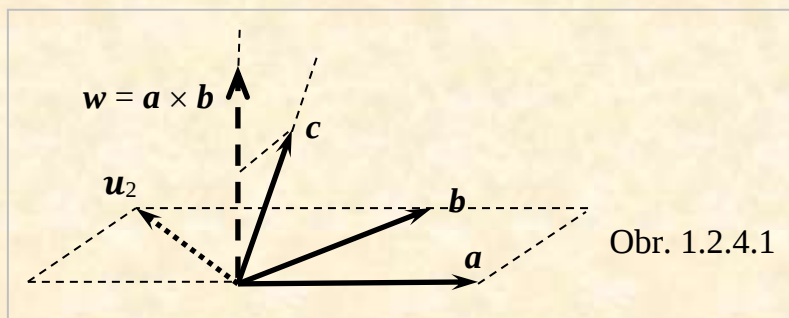
1. Uvedte možné varianty zmiešaného súčinu troch vektorov.
2. Aký je geometrický význam zmiešaného súčinu? Zdôvodnite svoje tvrdenie.
3. Viete zdôvodniť pravidlo o posune zátvoriek a súčasnej zámene "bodky a krížika" v zmiešanom súčine?
4. V ktorých prípadoch je zmiešaný súčin kladný, záporný, nulový?
5. Vyjadrite zmiešaný súčin troch vektorov v tvare determinantu.
6. Čo sa zmení na zmiešanom súčine, ak v ňom zmeníme poradie dvoch vektorov?

1.2.4 Dvojnásobný vektorový súčin

Dvojnásobný vektorový súčin medzi tromi vektormi $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ môže mať (pokiaľ neuvažujeme iné poradie vektorov) dva tvary:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \quad \text{a} \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}. \quad (1.2.4.1)$$

Zo zápisu je zrejmé, že výsledkom dvojnásobného vektorového súčinu je vektorová veličina. Uvedené dva tvary neposkytujú rovnaký výsledok. Výsledkom súčinu vektorov nachádzajúcich sa v zátvorke je v oboch prípadoch vektor, ktorý je na ich rovinu kolmý (označme ho ako $\mathbf{w}$, obr. 1.2.4.1). Súčinom vektora $\mathbf{w}$ s ďalším vektorom je vektor $\mathbf{u}$, ktorý je kolmý aj na vektor $\mathbf{w}$, takže $\mathbf{u}$ musí ležať v rovine vektorov, ktoré sú uvedené v zátvorke. To znamená, že výsledok dvojnásobného vektorového súčinu $\mathbf{u}$ možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov nachádzajúcich sa v zátvorke. V prvom prípade výsledný vektor $\mathbf{u}_1$ leží v rovine vektorov $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ a v druhom prípade výsledný vektor $\mathbf{u}_2$ leží v rovine vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Druhý prípad je nakreslený na obrázku.



Obr. 1.2.4.1

Pre výsledné vektory platia nasledujúce vzťahy:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (1.2.4.2)$$

$$\mathbf{u}_2 = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \quad (1.2.4.3)$$

Správnosť týchto vzťahov možno dokázať celkom všeobecným postupom, ktorý je však náročný a pomerne rozsiahly. Preto si jeden zo vzťahov, a to (1.2.4.3), odvodíme zjednodušeným postupom na príklade troch ľubovoľných nekomplanárnych vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, v špeciálne zvolenej karteziánskej súradnicovej sústave. Súradnicovú os x zvolíme tak, aby bola rovnobežná s vektorom $\mathbf{a}$, takže vektor $\mathbf{a}$ bude mať len jednu zložku, a to rovnobežnú s jednotkovým vektorom $\mathbf{i}$: $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i}$. Os y zvolíme tak, aby rovina (xy) bola rovnobežná s rovinou určenou vektormi $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Vektor $\mathbf{b}$, pokiaľ nie je kolmý na $\mathbf{a}$, bude mať dve zložky: $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}$. Tretia os karteziánskej sústavy je tým už jednoznačne určená, a tak vektor $\mathbf{c}$, ak chceme uvažovať čo najvšeobecnejšie, musí mať tri zložky: $\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}$.

Súhrnne:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x \mathbf{i}, \\ \mathbf{b} &= b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}, \\ \mathbf{c} &= c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.2.4.5)$$

Potom dvojnásobný vektorový súčin $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ vypočítame:

$$\begin{aligned} &= [a_x \mathbf{i} \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j})] \times (c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}) = \\ &= [a_x b_y \mathbf{k}] \times (c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}) = \\ &= a_x b_y c_x \mathbf{j} - a_x b_y c_y \mathbf{i}. \end{aligned}$$

K výsledku pridáme člen $(a_x b_x c_x \mathbf{i} - a_x b_x c_x \mathbf{i})$, ktorý je fakticky nulový, ale s jeho pomocou sa rýchlo podarí výsledok upraviť do konečného tvaru. Tak dostaneme:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = a_x b_y c_x \mathbf{j} - a_x b_y c_y \mathbf{i} + (a_x b_x c_x \mathbf{i} - a_x b_x c_x \mathbf{i}).$$

Vhodným pospájaním členov dostaneme:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (a_x c_x) (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}) - (b_x c_x + b_y c_y) (a_x \mathbf{i}).$$

Keď si uvedomíme, že platí $a_x c_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ a $b_x c_x + b_y c_y = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$,

čo si ľahko overíme vypočítaním týchto skalárnych súčinov vychádzajúc zo zadania vektorov (1.2.4.5), dostaneme konečný výsledok

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

Podobne možno odvodiť aj vzťah (1.2.4.2), pričom opäť sa overí zásada, že výsledný vektor, výsledok dvojnásobného vektorového súčinu, možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov uvedených v zátvorke.

Dvojnásobný vektorový súčin sa často využíva pri vyjadrovaní vzťahov v mechanike, ale aj elektromagnetizme.

Príklad 1.2.4.1 Vypočítajte dvojnásobný vektorový súčin $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ vektorov $\mathbf{a} = 5\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ a overte si, že výsledný vektor leží v rovine vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ležia v rovine xy , takže výsledný vektor by mal mať len zložky rovnobežné s jednotkovými vektormi $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. Nakreslite si obrázok.

Riešenie: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = [5\mathbf{i} \times (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j})] \times (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) = [15\mathbf{k}] \times (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) = 30\mathbf{j} + 15\mathbf{i}$.

Kontrolné otázky

1. Napište dva možné varianty dvojnásobného vektorového súčinu.
2. V ktorej rovine leží výsledný vektor dvojnásobného vektorového súčinu? Zdôvodnite svoje tvrdenie.
3. Napište vzťahy vyjadrujúce výsledný vektor získaný dvojnásobným vektorovým súčinom.
4. Čím sa navzájom odlišujú výsledky súčinov $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$, $\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$?
5. Čím sa navzájom odlišujú výsledky súčinov $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$?

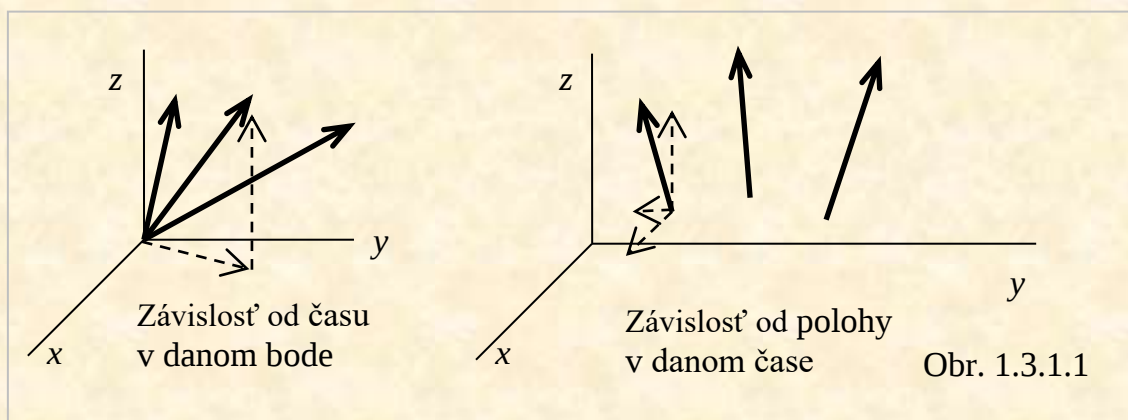
1.3 Derivácie vektorových funkcií

Kľúčové slová

skalárna funkcia, vektorová funkcia, derivácia vektorovej funkcie, derivácia súčinu vektorových funkcií, gradient, divergencia, rotácia

1.3.1 Vektorová funkcia

Základnými charakteristikami vektorových veličín sú ich veľkosť a smer. Tieto charakteristiky môžu závisieť od času aj od priestorových súradníc, podobne ako pri skalárnych veličinách. Napríklad teplota vo vybranom bode v miestnosti sa môže meniť s plynúcim časom, ráno je iná ako popoludní. V tomto prípade ide o **skalárnu funkciu** jednej premennej – času. Vo väčšej miestnosti však v rovnakom čase nemusí byť teplota v rôznych miestach rovnaká. V takom prípade ide o skalárnu funkciu priestorových súradníc. Z tohto pohľadu najvšeobecnejšia skalárna funkcia závisí od času aj od priestorových súradníc. Podobné závislosti sú možné aj pri vektorových veličinách. Napríklad rýchlosť prúdenia vody v rieke v pevne zvolenom bode koryta vo všeobecnosti sa s časom mení, závisí od vodného stavu. A istotne v danom časovom okamihu v rôznych miestach rieky je rýchlosť rôzna - nie iba čo do veľkosti, ale aj čo do smeru.



Preto možno hovoriť o **vektorových funkciách** viacerých premenných, špeciálne priestorových súradníc x, y, z a času t . Túto skutočnosť vyjadrujeme zápisom $\mathbf{f}(x, y, z, t)$. Každá vektorová funkcia má v trojrozmernom priestore vo všeobecnosti tri zložky, pričom každá zložka opäť závisí od priestorových súradníc, aj od časovej súradnice. Preto funkciu $\mathbf{f}$ pomocou zložiek zapíšeme v tvare

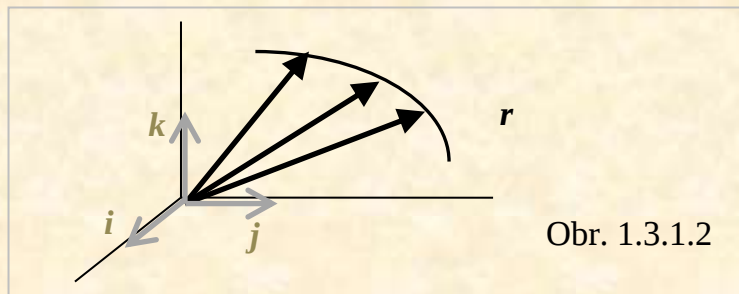
$$\mathbf{f}(x, y, z, t) = f_x(x, y, z, t)\mathbf{i} + f_y(x, y, z, t)\mathbf{j} + f_z(x, y, z, t)\mathbf{k}. \quad (1.3.1.1)$$

Špeciálnym prípadom je vektorová funkcia, ktorá závisí len od času: $\mathbf{f}(t)$ (obr.1.3.1.1 vľavo). Je to funkcia, pri ktorej s plynúcim časom sa vo všeobecnosti mení jej veľkosť i smer. V súlade s vyjadrením podľa (1.3.1.1) má tri zložky, pričom vo zvolenej súradnicovej sústave každá z jej súradníc závisí od času, nie však od

priestorových súradníc. Vhodným príkladom je polohový vektor pohybujúcej sa častice $\mathbf{r}(t)$, ktorý spája začiatok súradnicovej sústavy s časticou, takže koniec vektora sa posúva po krivke, po ktorej sa častica pohybuje (obr. 1.3.1.2):

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Príkladom vektorovej funkcie závisiacej od priestorových súradníc ale nemeniacej sa s časom, je vektor intenzity $\mathbf{E}$ v elektrostatickom poli bodového náboja. Túto jeho závislosť vyjadrujeme zápisom $\mathbf{E}(x, y, z)$.



Pri opise fyzikálnych dejov alebo polí nestačí poznať len hodnoty funkcií, ale aj ich zmeny, či už súvisiace s plynúcim časom, alebo zmeny pozdĺž jednotlivých priestorových súradníc. Na tento účel slúžia *derivácie vektorových funkcií*. Opačnou matematickou operáciou je *integrácia vektorovej funkcie*, ktorou získavame spravidla rozdiely hodnôt funkcií, alebo hodnoty týkajúce sa istého objemu (objemový integrál), ohraničenej plochy (plošný integrál), alebo časti krivky (krivkový integrál). Vo všetkých prípadoch je pojem vektorovej funkcie, ktorá závisí od priestorových súradníc, rozhodujúci.

Kontrolné otázky

1. Uved'te príklad skalárnej funkcie závisiacej od času.
2. Uved'te príklad skalárnej funkcie závisiacej od priestorových súradníc.
3. Uved'te príklad vektorovej funkcie závisiacej iba od času.
4. Uved'te príklad vektorovej funkcie závisiacej od priestorových premenných a času.

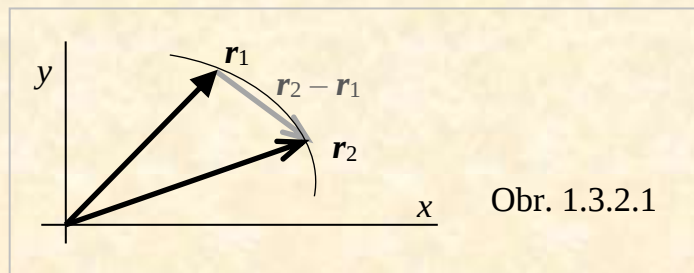
1.3.2 Derivácia vektorovej funkcie podľa času

Zavádza sa rovnako ako derivácia funkcie jednej premennej, t.j. ako limita podielu. Napríklad derivácia polohového vektora $\mathbf{r}(t)$ sa definuje vzťahom:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1}, \quad (1.3.2.1)$$

kde $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$ sú polohové vektory (napr. pohybujúcej sa častice) v okamihoch t_1 a t_2 . Takto je definovaná okamžitá rýchlosť (častice), pomocou ktorej možno dobre pochopiť význam derivácie vektorovej funkcie. Na obrázku 1.3.2.1 sú nakreslené príslušné vektory, takže vidno smer i veľkosť vektora $\Delta \mathbf{r}$. V limite pri $t_2 \rightarrow t_1$ sa

vektor $\mathbf{r}_2$ približuje k vektoru $\mathbf{r}_1$, takže vektor $\Delta\mathbf{r}$ sa skracuje a postupne sa svojim smerom približuje k smeru dotyčnice krivky v bode s polohovým vektorom $\mathbf{r}_1$. Pri definícii derivácie v menovateli zlomku vystupuje časový interval, teda skalárna veličina, takže podiel $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ je v podstate skalárnym násobkom vektora $\Delta\mathbf{r}$, pričom násobiacim skalárom je zlomok $1/\Delta t$. Preto výsledkom derivácie vektorovej funkcie podľa času je opäť vektorová funkcia, ktorej smer je určený čitateľom zlomku z definície derivácie. V tomto prípade smer vektora rýchlosti je totožný so smerom dotyčnice krivky v bode $\mathbf{r}_1$. Veľkosť výsledku je veľkosť okamžitej rýchlosti (častice).



Obr. 1.3.2.1

Pri konkrétnych výpočtoch derivácie vektorovej funkcie, keď chceme získať číselné hodnoty, treba vektorovú funkciu vyjadriť v zložkách, ako v (1.3.1.1). Napríklad polohový vektor pohybujúcej sa častice má potom tvar:

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k}.$$

Takto zapísaná vektorová funkcia predstavuje súčet troch funkcií, preto deriváciu polohového vektora vyjadríme ako súčet derivácií jeho troch zložiek:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \quad (1.3.2.2)$$

V tomto výraze vystupujú zložky rýchlosti: $v_x \mathbf{i} = (dx/dt) \mathbf{i}$ atď., resp. súradnice vektora rýchlosti $v_x = (dx/dt)$. Súradnica vektora rýchlosti predstavuje zmenu príslušnej súradnice polohového vektora pripadajúcej na jednotkový časový interval. Podľa definície derivácie platí

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \quad (1.3.2.3)$$

Táto derivácia môže byť kladná, záporná, aj nulová. Kladná je vtedy, keď s pribúdajúcim časom rastie hodnota súradnice, záporná v opačnom prípade.

Význam "zlomku" (dx/dt) pochopíme na základe nasledujúcej úvahy. Ak častica za 1 s prejde napríklad 5 m, tak číselnú hodnotu rýchlosti častice vyjadríme ako podiel $5/1 = 5$. Táto častica za časový interval 0,1 s prejde 0,5 m, za 0,01 s 0,05 m atď., ale podiel hodnôt $0,5/0,1 = 0,05/0,01 \dots$ atď. je stále rovnaký a zachová sa aj v limitnom prípade, keď sa hodnota menovateľa $t_2 - t_1$ blíži k nule. Preto výraz dx/dt vyjadruje zmenu súradnice pripadajúcu na jednotkový časový interval (sekundu). Takto treba chápať význam derivácie aj v iných prípadoch, keď v čitateli i v menovateli limity (1.3.2.3) sú iné premenné ako v tomto uvedenom príklade.

Príklad 1.3.2.1 Vypočítajte súradnice, zložky a veľkosť rýchlosti častice, keď súradnice jej polohového vektora sú vyjadrené takto:

$x = p t$, $y = q + s t + 0,5 u t^2$, $z = 0$, pričom konštanty vo vzťahoch majú hodnoty $p = -3 \text{ m/s}$, $q = 4 \text{ m}$, $s = 2 \text{ m/s}$, $u = -9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Riešenie: Ak orientujeme os x vodorovne a os y zvislo, tak pozornejší čitateľ zistí, že ide o šikmý vrh zo začiatkovej výšky $q = 4 \text{ m}$, začiatkovou rýchlosťou $s = 2 \text{ m/s}$ nahor a rýchlosťou $p = 3 \text{ m/s}$ vodorovne v zápornom smere osi x . Vyjadríme polohový vektor v zložkovom tvare:

$\mathbf{r}(t) = p t \mathbf{i} + (q + s t + 0,5 u t^2) \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$. Vektor rýchlosti získame deriváciou polohového vektora, pričom použijeme vzťah (1.3.2.2):

$$\mathbf{v} = p \mathbf{i} + (s + u t) \mathbf{j},$$

ktorý je v zložkovom tvare, a má zložky v smere vektorov $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$. Pre súradnice vektora $\mathbf{v}$ pritom platí: $v_x = p = -3 \text{ m/s}$, $v_y = s + u t = (2 - 9,81 t) \text{ m/s}$. To znamená, že súradnica v_y sa mení s časom. Jej konkrétna číselná hodnota závisí od časového údaj, ktorý do vzťahu pre súradnicu dosadíme. Veľkosť vektora $\mathbf{v}$ získame, ak použijeme vzťah (1.1.4.3): $v = [p^2 + (s + u t)^2]^{1/2}$.

Kontrolné otázky

1. Vyjadrite, čo rozumieme pod deriváciou vektorovej funkcie podľa času.
2. Výsledkom derivácie vektorovej funkcie podľa času je funkcia vektorová, alebo skalárna?
3. Slovné vyjadrite, čo predstavuje veľkosť derivácie vektorovej funkcie podľa času.
4. Vyjadruje derivácia vektorovej funkcie podľa času aj smer výslednej vektorovej funkcie?

1.3.3 Derivácia súčinu vektorových funkcií podľa času

Rozlíšime tri hlavné prípady súčinov – skalárny násobok vektorovej funkcie (závisiacej od času) skalárnou funkciou (závisiacou od času), skalárny súčin dvoch vektorových funkcií (závisiacich od času) a ako tretí prípad ich vektorový súčin.

V prvom prípade, ak $\mathbf{b}(t) = s(t)\mathbf{a}(t)$, potom pri derivácii tohoto výrazu musíme postupovať ako pri derivácii súčinu:

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{d(s\mathbf{a})}{dt} = \frac{ds}{dt}\mathbf{a} + s \frac{d\mathbf{a}}{dt}. \quad (1.3.3.1)$$

Podobne, ak máme derivovať skalárny alebo vektorový súčin dvoch vektorových funkcií závisiacich od času, treba postupovať podľa pravidiel pre deriváciu súčinu:

$$\frac{d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} \right) + \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt} \cdot \mathbf{a} \right). \quad (1.3.3.2)$$

$$\frac{d(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} \right) + \left(\mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right). \quad (1.3.3.3)$$

Pri derivácii vektorového súčinu treba zachovať poradie vektorových funkcií, pri skalárnom súbine možno uplatniť jeho komutatívnosť. Analogicky postupujeme ak máme derivovať napríklad skalárny násobok vektorového súčinu $s(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, alebo súčin skalárnej funkcie so skalárnym súčinom $s(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$. Vzťahy pre derivácie viacnásobných súčinov si už čitateľ dokáže odvodiť sám.

Príklad 1.3.3.1 Derivujte podľa času vektorovú funkciu $\mathbf{F}(t)$, ktorá je výsledkom násobenia vektorovej funkcie skalárnou funkciou:

$\mathbf{F}(t) = (3t^2)(p\mathbf{i} + qt\mathbf{j} + rt^2\mathbf{k})$, kde p, q, r sú konštanty. Vypočítajte veľkosť vektora $\mathbf{G}(t)$, získaného touto deriváciou, v čase $t = t_1$.

Riešenie: Postupujeme podľa vzťahu (1.3.3.1):

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}/dt &= (6t)(p\mathbf{i} + qt\mathbf{j} + rt^2\mathbf{k}) + (3t^2)(q\mathbf{j} + 2rt\mathbf{k}) = \\ &= 6pt\mathbf{i} + (6qt^2 + 3qt^2)\mathbf{j} + (6rt^3 + 6rt^3)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Veľkosť výsledného vektora $\mathbf{G}(t) = 6pt\mathbf{i} + 9qt^2\mathbf{j} + 12rt^3\mathbf{k}$ vypočítame podľa vzťahu (1.1.4.3) (t.j. Pythagorovej vety), do ktorého dosadíme časový údaj t_1 :

$$G(t) = \sqrt{(6pt_1)^2 + (9qt_1^2)^2 + (12rt_1^3)^2}.$$

Kontrolné otázky

1. Ako derivujeme podľa času súčin vektorovej a skalárnej funkcie (t.j. skalárny násobok vektorovej funkcie), keď obe funkcie závisia iba od času?
2. Vyjadrite deriváciu skalárneho súčinu dvoch vektorových funkcií podľa času.
3. Vyjadrite deriváciu vektorového súčinu dvoch vektorových funkcií podľa času.

1.3.4 Gradient skalárnej funkcie

V tomto článku bude opísaná derivácia skalárnej funkcie podľa priestorových premenných. Nech je v karteziánskej súradnicovej sústave zadaná skalárna funkcia $P(x, y, z)$, napríklad teplota v miestnosti alebo potenciál v elektrostatickom poli. Hodnoty tejto funkcie sa menia, ak postupujeme v smere jednotlivých súradnicových osí, pričom strmosť zmeny nemusí byť vo všetkých smeroch rovnaká. Pod strmosťou

zmeny rozumieme prírastok hodnoty funkcie pripadajúci na posunutie v príslušnom smere o jednotku dĺžky. Strmosti v smere osí x, y, z označíme symbolmi S_x, S_y, S_z pričom pre ne platí

$$S_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta x}, \quad S_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta y}, \quad S_z = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (1.3.4.1)$$

Limity vo výrazoch pre strmosť predstavujú derivácie. Pri posunutí pozdĺž osi y sa mení len súradnica y , ostatné dve sa nemenia. Takáto derivácia funkcie viacerých premenných sa nazýva *parciálna* a označuje sa inak ako derivácia funkcie jednej premennej.

Strmosť zmien funkcie $P(x, y, z)$ sa vyjadruje potom v tvare:

$$S_x = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad S_y = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad S_z = \frac{\partial P}{\partial z} \quad (1.3.4.2)$$

Strmosti S_x, S_y, S_z nie sú v celom priestore konštantné, ale sa môžu od bodu k bodu meniť. Ak postúpime v smere osi y o Δy , zmení sa funkcia $P(x, y, z)$ o hodnotu:

$$(\Delta P)_y = S_y \Delta y = \frac{\partial P}{\partial y} \Delta y. \quad (1.3.4.3)$$

Ak vykonáme posunutie všeobecným smerom, možno ho rozložiť na tri posunutia v smeroch súradnicových osí, takže celková zmena funkcie $P(x, y, z)$ bude

$$\Delta P = (\Delta P)_x + (\Delta P)_y + (\Delta P)_z = \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial P}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial P}{\partial z} \Delta z, \quad (1.3.4.4)$$

alebo pri limitne malých posunutíach:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz. \quad (1.3.4.5)$$

Takýmto vzťahom je vyjadrený *úplný (totálny) diferenciál* funkcie troch priestorových premenných. Vzťah (1.3.4.5) vyjadríme aj ako skalárny súčin dvoch vektorov:

diferenciálu polohového vektora

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k} \quad (1.3.4.6)$$

a vektora, ktorý nazývame **gradient skalárnej funkcie P** :

$$\text{grad } P(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (1.3.4.7)$$

O správnosti tohto tvrdenia sa čitateľ môže presvedčiť vykonaním skalárneho súčinu.

Vektor $\text{grad } P$ má smer najstrmšieho vzrastu funkcie P a jeho veľkosť sa rovná prírastku funkcie P pripadajúcemu na posunutie o jednotku vzdialenosti v smere najväčšieho vzrastu. Na ilustráciu – v danom mieste mapy by tento vektor bol kolmý na vrstevnice a veľkosťou by predstavoval prírastok nadmorskej výšky pri posunutí o jednotku vzdialenosti v príslušnom horizontálnom smere.

Výraz $\text{grad } P$ sa zapisuje v symbolickom tvare:

$$\text{grad } P(x, y, z) = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) P, \quad (1.3.4.8)$$

pričom výraz v zátvorke predstavuje diferenciálno - vektorový operátor, nazývaný Hamiltonov operátor nabla, stručne **nabla-operátor** a označovaný symbolom ∇ :

$$\nabla = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (1.3.4.9)$$

Jeho aplikáciou na skalárnu funkciu podľa vzoru (1.3.4.7) vznikne zo skalárnej funkcie vektorová funkcia. Aplikovať operátor znamená vykonať operácie, ktoré predpisuje. To znamená, že podľa vzťahu (1.3.4.7) treba skalárnu funkciu najprv parciálne derivovať podľa premennej x a týmto výsledkom (skalárom) násobiť jednotkový vektor $\mathbf{i}$. K tomuto členu – prvej zložke výsledného vektora – pripočítať druhý a tretí člen, ktoré dostaneme analogicky deriváciami podľa premenných y a z , ktorými vynásobíme jednotkové vektory $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$.

Príklad 1.3.4.1 Vypočítajte gradient skalárneho elektrostatického potenciálu v okolí bodového náboja Q , umiestneného v začiatku súradnicovej sústavy. Potenciál je vyjadrený vzťahom $\varphi(x, y, z) = K (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, kde $K = (Q/4\pi\epsilon_0)$.

Riešenie: Najprv vypočítame parciálnu deriváciu potenciálu podľa premennej x :

$$\partial\varphi/\partial x = K(-1/2) (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} (2x) = -Kx(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

Výsledky parciálnych derivácií podľa premenných y a z sú analogické, takže môžeme priamo napísať $\text{grad } \varphi$, keď k výsledkom derivácií dopíšeme jednotkové vektory:

$$\text{grad } \varphi = -K \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -K \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.3.4.10)$$

kde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ je polohový vektor miesta, v ktorom počítame vektor $\text{grad } \varphi$ a v menovateli je tretia mocnina veľkosti tohto polohového vektora. Vektor $\text{grad } \varphi$ má opačný smer ako polohový vektor $\mathbf{r}$, lebo elektrostatický potenciál s rastúcou vzdialenosťou od náboja klesá, takže smer vzrastu potenciálu, a teda vektora $\text{grad } \varphi$ je opačný.

Poznámka Gradient vektorovej funkcie predstavuje aplikáciu nabla-operátora na vektorovú funkciu. Napríklad: $\text{grad } \mathbf{B}(x, y, z) = \left(\mathbf{i} \partial/\partial x + \mathbf{j} \partial/\partial y + \mathbf{k} \partial/\partial z \right) \mathbf{B} =$

$= \mathbf{i} \partial \mathbf{B} / \partial x + \mathbf{j} \partial \mathbf{B} / \partial y + \mathbf{k} \partial \mathbf{B} / \partial z$, pričom len výraz $\mathbf{j} (\partial \mathbf{B} / \partial y)$ obsahuje tri členy: $\mathbf{j}((\partial B_x / \partial y)\mathbf{i} + (\partial B_y / \partial y)\mathbf{j} + (\partial B_z / \partial y)\mathbf{k})$. Rovnako aj ďalšie dva členy, takže spolu v celom grad $\mathbf{B}$ je deväť členov, v ktorých však vzťahy medzi vektormi v nich vystupujúcich sme zatiaľ nedefinovali. Ide o tzv. **tenzorovú veličinu**, ktorej v tomto texte ďalšiu pozornosť nevenujeme.

Kontrolné otázky

1. Napište totálny diferenciál skalárnej funkcie priestorových premenných x, y, z .
2. Uveďte, čo je gradient skalárnej funkcie priestorových premenných.
3. Čo predstavujú súradnice (zložky) gradientu skalárnej funkcie?
4. Napište nabra- operátor! Je to skutočný vektor? Má veľkosť a smer?

1.3.5 Divergencia a rotácia vektorovej funkcie

Pri opise fyzikálnych polí sa často stretávame s výrazmi, ktoré možno formálne vyjadriť ako skalárny alebo ako vektorový súčin *nabra-operátora* s vektorovou funkciou. Označujú sa názvami *divergencia*, resp. *rotácia vektorovej funkcie*. Tieto operácie majú súvislosť s typom fyzikálnych polí. Napríklad elektrostatické pole je žriedlového typu – siločiarly vychádzajú z kladných nábojov (žriedla, zdroje poľa) a končia v záporných nábojoch. Pre takéto polia je typická nenulová divergencia vektorovej funkcie, ktorá ich opisuje. V magnetických poliach, kde indukčné čiary sú do seba uzavreté krivky (polia majú vírový charakter), uplatňuje sa rotácia príslušnej vektorovej funkcie.

Divergencia vektorovej funkcie sa definuje vzťahom:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (1.3.5.1)$$

V symbolickom skalárnom súčine nabra-operátora s vektorovou funkciou sa postupuje rovnako, ako pri skalárnom súčine dvoch vektorových funkcií zapísaných v zložkovom tvare, teda podľa vzťahu (1.2.1.5). Výsledkom divergencie vektorovej funkcie je skalárna funkcia. Súčin je skutočne symbolický, lebo nabra-operátor nie je v skutočnosti vektor, nemožno hovoriť o jeho veľkosti, ani o smere.

Rotácia vektorovej funkcie sa definuje vzťahom:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) =$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right).$$

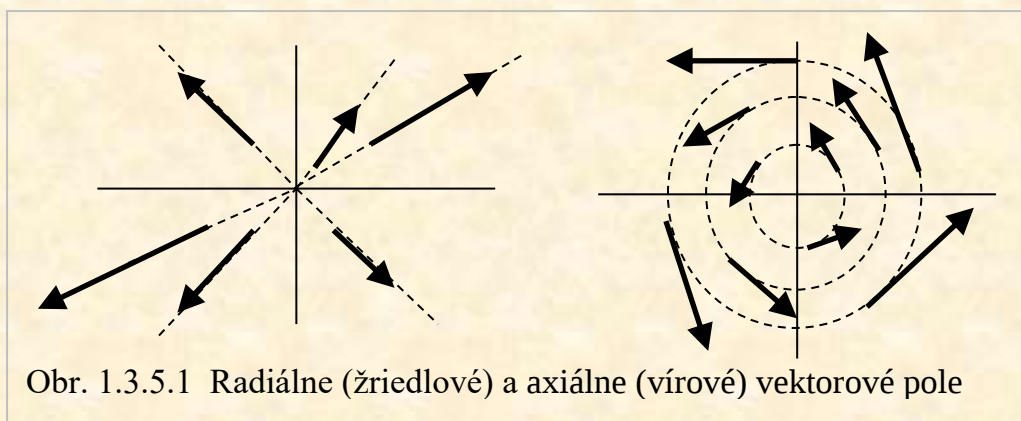
Aj v tomto prípade sa symbolický vektorový súčin nabla-operátora s vektorovou funkciou vykonáva podľa pravidiel vektorového súčinu medzi vektormi vyjadrenými v zložkách, teda podľa vzťahov (1.2.2.5) a (1.2.2.6).

Príklad 1.3.5.1 Vypočítajte divergenciu a rotáciu vektorovej funkcie $\mathbf{f} = \mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Uvedomte si, že takáto funkcia (polohový vektor) má charakter radiálneho vektorového poľa (žriedlového poľa), lebo v ľubovoľnom bode priestoru tejto funkcii prislúcha vektor $\mathbf{r}$ smerujúci od stredu (začiatku) súradnicovej sústavy (obr. 1.3.5.1)

Riešenie:

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \nabla \cdot \mathbf{r} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) = 0.$$



Obr. 1.3.5.1 Radiálne (žriedlové) a axiálne (vírové) vektorové pole

Príklad 1.3.5.2 Vypočítajte divergenciu a rotáciu vektorovej funkcie $\mathbf{f}(x, y, z) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, ktorá je vektorovým súčinom konštantného vektora $\boldsymbol{\omega}$ s polohovým vektorom $\mathbf{r}$. Nech $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ a $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$. Vektorová funkcia $\mathbf{f}$ zobrazuje pole vektora rýchlosti pri otáčaní roviny uhlovou rýchlosťou ω . Je to príklad axiálneho (vírového) vektorového poľa, v ktorom vektorová funkcia má vždy smer dotyčnice kružnice, ktorej stred leží v začiatku súradnicovej sústavy.

Riešenie: Najprv vypočítame vektorový súčin

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (\omega\mathbf{k}) \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = x\omega\mathbf{j} - y\omega\mathbf{i}.$$

Potom

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (x\omega\mathbf{j} - y\omega\mathbf{i}) = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (x\omega\mathbf{j} - y\omega\mathbf{i}) = 2\omega\mathbf{k}.$$

Výsledky príkladov 1.3.5.1 a 1.3.5.2 hovoria o tom, že rotácia vektorovej funkcie predstavujúcej radiálne pole sa rovná nule, ale rotácia v prípade axiálneho poľa je nenulová. Naopak je to pri divergencii, kde nenulový výsledok sme dostali pri radiálnom poli. Tieto výsledky naznačujú význam operácií *divergencia* a *rotácia* pri charakterizácii fyzikálnych polí. Elektrostatické pole v okolí elektrických nábojov má *radiálny charakter*, zatiaľ čo magnetické pole v okolí vodičov elektrického prúdu *charakter axiálny*. Podrobnejšie budú tieto vlastnosti polí opísané v príslušných kapitolách.

Kontrolné otázky

1. Uveďte, čo rozumiete pod divergenciou vektorovej funkcie.
2. Uveďte, čo rozumieme pod rotáciou vektorovej funkcie.
3. Napíšte rotáciu vektorovej funkcie v tvare determinatu.
4. Uveďte charakteristiky radiálneho a axiálneho vektorového poľa - aká je ich divergencia a rotácia.

1.3.6 Viacnásobné derivácie

Doteraz uvedené aplikácie operátora nabla predstavujú prvé derivácie funkcií priestorových premenných. Operátor však možno aplikovať na funkciu získanú prvou deriváciou, teda dvakrát po sebe, čím vznikajú **druhé derivácie** funkcií. Aplikácie sa zasa môžu uskutočniť tromi spôsobmi – ako gradient, divergencia alebo rotácia, preto jestvuje aj viac druhov druhých derivácií.

Najprv uvidíme všetky možnosti **druhej derivácie skalárnej funkcie** $S(x, y, z)$:

a)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla S) &= \text{div grad } S(x, y, z) = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\mathbf{i} \frac{\partial S}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial S}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial S}{\partial z} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \right) = \Delta S\end{aligned}$$

kde

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

je **Laplaceov operátor**.

Výsledkom je skalárna funkcia, čo v podstate vidno hneď na začiatku, lebo ide o symbolický skalárny súčin:

$$\nabla \cdot (\nabla S) = \Delta S. \quad (1.3.6.1)$$

b)

$$\nabla \times (\nabla S) = \text{rot grad } S(x, y, z) = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(\mathbf{i} \frac{\partial S}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial S}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial S}{\partial z} \right) =$$

$$\mathbf{i} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} \right) = \mathbf{0}$$

Rotácia gradientu skalárnej funkcie sa vždy rovná nule:

$$\nabla \times (\nabla S) = \mathbf{0} . \quad (1.3.6.2)$$

c)

Tretia možnosť – $\nabla(\nabla S) = \text{grad grad } S$ predstavuje tenzorovú veličinu, ale s takýmto prípadom druhej derivácie sa pri opise fyzikálnych polí prakticky nestretávame.

Druhé derivácie vektorových funkcií:

d)

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \text{grad div } \mathbf{A}(x, y, z) = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) =$$

$$\mathbf{i} \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right)$$

Výsledkom je vektorová funkcia. Operáciou v zátvorke $(\nabla \cdot \mathbf{A})$ vzniká z vektorovej funkcie skalárna funkcia, ale nasledujúci gradient z nej opäť vytvorí vektorovú funkciu.

e)

Druhú deriváciu $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \text{div rot } \mathbf{A}(x, y, z)$ možno vyjadriť podobne ako zmiešaný súčin v tvare determinantu (vzťah 1.2.3.5). Vidno, že v determinante sú dva riadky rovnaké, pozostávajúce zo "súradníc" nabla-operátora, takže po realizácii celého výpočtu získame dvojicu rovnakých členov s opačnými znamienkami. Preto je výsledok tejto druhej derivácie vždy nulový:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (1.3.6.3)$$

f)

Druhú deriváciu $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \text{rot rot } \mathbf{A}(x, y, z)$ rozpíšeme podľa predpisu pre dvojnásobný vektorový súčin:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A},$$

takže

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}. \quad (1.3.6.4)$$

Uvedené druhé derivácie sa používajú pri formuláciách zákonov platných vo fyzikálnych poliach. Riešenie príkladov obsahujúcich tieto derivácie neuvádzame.

Kontrolné otázky

1. Uved'te niektoré operácie s dvojnásobným použitím nabla-operátora (t.j. druhé derivácie)!
2. Uved'te aspoň jeden prípad dvojnásobného použitia nabla-operátora, v ktorom je výsledok vždy nulový!

1.4 Integrácia vektorových funkcií

Kľúčové slová

Krivkový integrál, plošný integrál, tok vektorovej funkcie, objemový integrál, Stokesova veta, Gaussova - Ostrogradského (integrálna) veta.

1.4.1 Integrácia podľa času

Najjednoduchším prípadom integrácie vektorovej funkcie je integrál typu

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{A} dt, \quad (1.4.1.1)$$

v ktorom t je skalárna premenná, pričom vektorová funkcia $\mathbf{A}$ závisí od tejto premennej. Keď vektorovú funkciu $\mathbf{A}(t)$ vyjadríme v zložkovom tvare,

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k},$$

integrál (1.4.1.1) môžeme rozpísať na tri integrály skalárnych funkcií:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{A} dt = \mathbf{i} \int_{t_1}^{t_2} A_x dt + \mathbf{j} \int_{t_1}^{t_2} A_y dt + \mathbf{k} \int_{t_1}^{t_2} A_z dt \quad (1.4.1.2)$$

Výsledkom je vektorová funkcia závisiaca od premennej t . Príkladom je impulz sily $\mathbf{I}$, definovaný ako integrál sily $\mathbf{F}$ podľa času:

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt.$$

Príklad 1.4.1.1 Zrýchlenie častice je zadané vzťahom $\mathbf{a} = pt^2 \mathbf{i} - qt \mathbf{j}$, pričom v čase t_1 mala častica rýchlosť $\mathbf{v}_1 = s \mathbf{j}$. Konštanty majú hodnoty $p = 2 \text{ m/s}^4$, $q = 4 \text{ m/s}^3$, $s = 3 \text{ m/s}$. Vypočítajte rýchlosť $\mathbf{v}_2$ častice v čase $t_2 > t_1$ keď vieme, že medzi zrýchlením a rýchlosťou platí vzťah $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a} dt$.

Riešenie :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a} dt = \mathbf{i} \int_{t_1}^{t_2} pt^2 dt - \mathbf{j} \int_{t_1}^{t_2} qt dt = \mathbf{i} p \left[\frac{t^3}{3} \right]_{t_1}^{t_2} - \mathbf{j} q \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t_1}^{t_2} = \\ &= \mathbf{i} \frac{p}{3} (t_2^3 - t_1^3) - \mathbf{j} \frac{q}{2} (t_2^2 - t_1^2). \\ \Rightarrow \mathbf{v}_2 &= s \mathbf{j} + \mathbf{i} \frac{p}{3} (t_2^3 - t_1^3) - \mathbf{j} \frac{q}{2} (t_2^2 - t_1^2). \end{aligned}$$

Po dosadení číselných údajov môžete vypočítať veľkosť rýchlosti, ako aj jej zložiek.

Kontrolné otázky

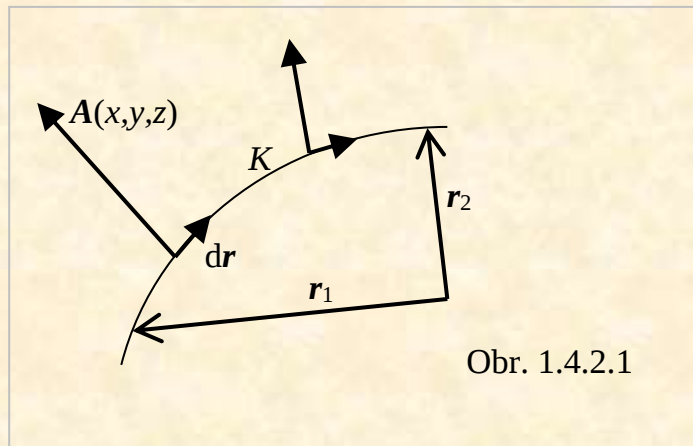
1. Aká funkcia je výsledkom integrácie vektorovej funkcie podľa času – vektorová, alebo skalárna?
2. Ak integrujeme vektorovú funkciu podľa času – môže mať výsledná funkcia iný počet zložiek ako pôvodná?
3. Uveďte príklad integrácie vektorovej funkcie podľa času.
4. Pri integrácii vektorovej funkcie podľa času – majú pôvodná a výsledná funkcia rovnaký fyzikálny rozmer?

1.4.2 Krivkový integrál, Stokesova veta

Pri **krivkových integráloch** sa najčastejšie stretávame s typom

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} . \quad (1.4.2.1)$$

Ide o integrál vektorovej funkcie $\mathbf{A}(x, y, z)$, od začiatočného bodu $\mathbf{r}_1$ v zvolenej súradnicovej sústave po koncový bod určený polohovým vektorom $\mathbf{r}_2$. V podstate je to súčet veľkého počtu elementárnych skalárnych súčinov $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = A d\ell \cos \alpha$, kde A je veľkosť vektorovej funkcie $\mathbf{A}$, $d\ell$ veľkosť príslušného $d\mathbf{r}$ a α uhol medzi nimi v danom bode krivky, pozdĺž ktorej integrujeme (obr.1.4.2.1). Elementárny vektor $d\mathbf{r}$ má v danom bode krivky K smer jej dotyčnice. Pritom veľkosť, aj smer vektora $\mathbf{A}(x, y, z)$ sa môžu



od bodu k bodu na krivke meniť. Takýmto integrálom sa vyjadruje napríklad práca W , pričom vektorovou funkciou je sila $\mathbf{F}$:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.4.2.2)$$

Ak vektor $\mathbf{F}$ a diferenciál polohového vektora $d\mathbf{r}$ vyjadríme v zložkovom tvare, t.j.

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} , \quad d\mathbf{r} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz ,$$

potom po vykonaní skalárneho súčinu dostaneme

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz), \quad (1.4.2.3)$$

takže ide o všeobecný krivkový integrál. Takýto tvar môžeme využiť ak chceme vypočítať číselnú hodnotu integrálu za predpokladu, že poznáme F_x, F_y, F_z ako funkcie premenných x, y, z . Ako integračné hranice vystupujú príslušné súradnice polohových vektorov $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$. V takejto forme možno výpočet integrálu aj naprogramovať a numericky vypočítať.

Pri splnení určitých podmienok možno integrál typu (1.4.2.1) vyjadriť ako rozdiel hodnôt skalárnej funkcie v koncovom a začiatočnom bode integrácie:

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = S(\mathbf{r}_2) - S(\mathbf{r}_1). \quad (1.4.2.4)$$

To platí vtedy, ak medzi skalárnou funkciou $S(x, y, z)$ a vektorovou funkciou $\mathbf{A}(x, y, z)$ platí vzťah $\mathbf{A} = \text{grad } S$, t.j.

$$A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} = \frac{\partial S}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial S}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial S}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1.4.2.5)$$

O uvedenom tvrdení sa možno presvedčiť aj pomocou vzťahov (1.3.4.2):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy + \frac{\partial S}{\partial z} dz \right) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dS = \\ &= S(\mathbf{r}_2) - S(\mathbf{r}_1) \end{aligned} \quad (1.4.2.6)$$

Vo vzťahoch (1.4.2.4) a (1.4.2.5) skalárna funkcia má význam potenciálu fyzikálneho poľa, vektorová funkcia význam jeho intenzity.

Príklad 1.4.2.1 Vypočítajme krivkový integrál funkcie $\mathbf{F} = 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} - mg \mathbf{k}$, ktorá reprezentuje homogénne tiažové pole v blízkosti povrchu Zeme, kde silu $\mathbf{F}$ považujeme za konštantnú - v každom bode priestoru má rovnakú veľkosť aj smer. Integrovať budeme od bodu $A(x_1, y_1, z_1)$ po bod $B(x_2, y_2, z_2)$ po krivke, ktorá spája tieto dva body.

Riešenie: Podľa rovnice (1.4.2.3) platí:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_{z_1}^{z_2} F_z dz = \int_{z_1}^{z_2} (-mg) dz = \\ &= (-mgz_2) - (-mgz_1) \end{aligned}$$

Z výsledku vidno, že krivkový integrál sily $\mathbf{F} = 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} - mg \mathbf{k}$ sa rovná rozdielu dvoch hodnôt skalárnej funkcie $S(x, y, z) = -mgz$, ktorá nezávisí od premenných

x, y . Z výpočtu vidno, že nebolo treba uviesť po akej krivke integrujeme, rozhodujúce sú iba začiatočná a koncová z-ová súradnica integrovania.

Príklad 1.4.2.2 Vypočítajme krivkový integrál funkcie $\mathbf{F} = -K\mathbf{r}$, obmedzenej na jednu rovinu, t.j. nech napr. $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Ide vlastne o vyjadrenie dostredivej sily na otáčajúcom sa disku, lebo má smer opačný ako vektor $\mathbf{r}$ (ktorý má začiatok v strede otáčania) a čím ďalej od stredu otáčania, tým je sila väčšia. Integrovať budeme od bodu s polohovým vektorom $\mathbf{r}_1$ po bod $\mathbf{r}_2$.

Riešenie: Funkciu $\mathbf{F}$ vyjadríme v zložkách $\mathbf{F}(x, y) = -K(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$, potom

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (F_x dx + F_y dy) = -K \int_{x_1}^{x_2} x dx - K \int_{y_1}^{y_2} y dy = \\ &= -\frac{K}{2} [(x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2)], \end{aligned}$$

čo možno ešte upraviť na tvar zodpovedajúci rozdielu hodnôt skalárnej funkcie:

$$-\frac{K}{2} [(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)] = \left(-\frac{K}{2} r_2^2\right) - \left(-\frac{K}{2} r_1^2\right),$$

kde $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2$, $r_2^2 = x_2^2 + y_2^2$.

Poznámka 1. Na príkladoch 1.4.2.1 a 1.4.2.2 sme videli, že výsledok nezávisí od tvaru integračnej krivky, ale len od začiatočného a koncového bodu. Ak by však vo vyjadrení funkcie $\mathbf{F}$ bol ešte ďalší člen, ktorý by reprezentoval napríklad trenie, potom výsledok integrácie by závisel od dĺžky konkrétne zvolenej integračnej krivky. Potom by takýto integrál nebolo možné vyjadriť ako rozdiel hodnôt skalárnej funkcie v koncovom a začiatočnom bode.

Poznámka 2. Ak by sme v integráli (1.4.2.6) integrovali opačným smerom, t.j. od $\mathbf{r}_2$ po $\mathbf{r}_1$, dostali by sme výsledok $S(\mathbf{r}_1) - S(\mathbf{r}_2)$, teda výsledok s opačným znamienkom. Pri integrácii po uzavretej krivke (keď začiatočný a koncový bod sú totožné) výsledok sa rovná nule, lebo na uzavretej krivke sa vyskytujú elementárne skalárne súčiny $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ kladné i záporné v takom zastúpení, že výsledok ich súčtu je nulový. Takúto vlastnosť majú vektorové funkcie v oboch uvedených príkladoch. Prvá z nich predstavovala homogénne pole, druhá radiálne. Stretávame sa však aj s poľami, v ktorých integrál po uzavretej krivke nie je nulový, napr. v magnetickom poli, ktoré má axiálny charakter. (Pozri príklad 1.3.5.2).

Ako bolo uvedené v Poznámke 2. krivkový integrál po uzavretej krivke (nazýva sa **cirkulácia vektorovej funkcie**) sa nemusí vždy rovnať nule. Vtedy

obyčajne možno krivkový integrál funkcie $\mathbf{A}$ pozdĺž uzavretej krivky nahradiť plošným integrálom rotácie funkcie $\mathbf{A}$, čo vyjadruje **Stokesova veta**:

$$\oint_K \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.4.2.7)$$

Plošný integrál sa počíta cez plochu, ktorá je ohraničená integračnou krivkou K . Tvar plochy pritom nie je presne definovaný, môže to byť časť roviny, ale aj iná plocha, napríklad časť guľovej plochy, elipsoidu, či inej komplikovanejšej plochy. Pritom nie je rozhodujúce, či krivka K leží v jednej rovine. Dôkaz týchto tvrdení, vrátane dôkazu správnosti Stokesovej vety, sú predmetom matematickej analýzy. Zjednodušené odvodenie tejto vety nájdete v dodatkoch.

Zo Stokesovej vety vyplýva interpretácia operácie $\text{rot } \mathbf{A}$. Ak by $\text{rot } \mathbf{A}$ bola v istej oblasti priestoru (roviny) konštantná, a vektor $d\mathbf{S}$ by bol s vektorom $\text{rot } \mathbf{A}$ rovnobežný (vtedy $\text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = |\text{rot } \mathbf{A}| dS$), bolo by možné vybrať ju pred integrál a napísať

$$|\text{rot } \mathbf{A}| = \frac{1}{S} \oint_K \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.4.2.8)$$

kde $S = \iint dS$. Preto veľkosť funkcie $\text{rot } \mathbf{A}$ možno číselne interpretovať ako cirkuláciu vektorovej funkcie po krivke ohraničujúcej plochu s jednotkovým obsahom.

Kontrolné otázky

1. Napíšte príklad krivkového integrálu.
2. V ktorom prípade výsledok krivkového integrálu závisí len od začiatočného a koncového bodu integrácie?
3. Uved'te príklad krivkového integrálu, pri ktorom integrál po uzavretej krivke sa rovná nule.
4. Uved'te príklad, v ktorom výsledok krivkového integrálu závisí od integračnej cesty, a nie iba od začiatočného a koncového bodu integrácie.
5. Vysvetlite obsah Stokesovej vety.

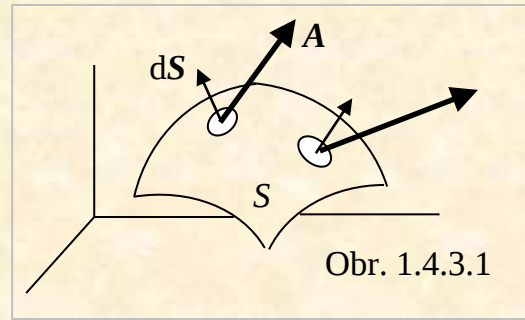
1.4.3 Plošný integrál, Gaussova – Ostrogradského (integrálna) veta

Pod **plošným integrálom** vektorovej funkcie sa najčastejšie rozumie integrál, ktorý zapisujeme v tvare

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.4.3.1)$$

Za znakom plošného integrálu je skalárny súčin vektorovej funkcie $\mathbf{A}$ s diferenciálom $d\mathbf{S}$, ktorý ako vektor je kolmý na príslušnú elementárnu plôšku a jeho veľkosť predstavuje jej plošný obsah. Takému integrálu sa hovorí *tok vektora $\mathbf{A}$ cez plochu S* . (Viac o toku vektora je v Dodatkoch.) Aj v tomto prípade, v zmysle Riemannovej

definície integrálu, ide vlastne o súčet limitne veľkého počtu elementárnych skalárnych súčinov $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = A dS \cos \alpha$, kde A je veľkosť vektorovej funkcie (vektora) $\mathbf{A}$, dS veľkosť príslušného $d\mathbf{S}$ a α uhol medzi nimi v danom bode plochy, pričom sa tieto súčiny sčítajú po celej ploche, po ktorej integrujeme. Veľkosť aj smer vektora $\mathbf{A}(x, y, z)$ sa môžu na ploche od bodu k bodu meniť (obr. 1.4.3.1).



Keď $d\mathbf{S}$ vyjadríme v zložkách: $d\mathbf{S} = \mathbf{i} dy dz + \mathbf{j} dz dx + \mathbf{k} dx dy$, tak skalárny súčin $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ možno vyjadriť aj v tvare:

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = A_x dy dz + A_y dz dx + A_z dx dy, \quad (1.4.3.2)$$

takže integrál (1.4.3.1) možno vo vhodnom prípade rozpísať ako súčet troch integrálov. Výsledkom tohto integrálu je skalárna funkcia.

Ako príklad možno uviesť vzťah medzi elektrickým prúdom I a vektorom hustoty elektrického prúdu $\mathbf{J}$:

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

V teórii poľa sa často stretávame s plošným integrálom cez uzavretú plochu (**výtok vektorovej funkcie**)

$$\oiint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.4.3.3)$$

ktorý pomocou **Gaussovej - Ostrogradského vety** možno premeniť na objemový integrál divergencie vektorovej funkcie $\mathbf{A}$:

$$\oiint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \text{div } \mathbf{A} d\tau, \quad (1.4.3.4)$$

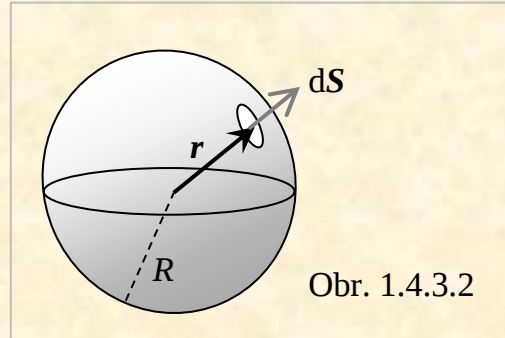
kde $d\tau$ predstavuje objemový element, ktorý v karteziánskej súradnicovej sústave má tvar $d\tau = dx dy dz$. Pod uzavretou plochou pritom rozumieme napríklad povrch gule, elipsoidu, alebo iného útvaru, tvoriaceho rozhranie medzi vnútorným a vonkajším priestorom. Podľa dohody sa elementárne plošné vektory $d\mathbf{S}$ orientujú vždy z uzavretej plochy von. Objemový integrál sa pritom počíta cez objem ohraničený uzavretou plochou. Presný dôkaz tejto veľmi významnej vety je záležitosťou matematickej analýzy, zjednodušený dôkaz nájdete v Dodatkoch.

Z Gaussovej - Ostrogradského vety sa dá dedukovať význam funkcie $\text{div } \mathbf{A}$. Ak je táto funkcia v celom uvažovanom (hoci malom) objeme konštantná, možno ju vybrať pred integrál, takže pravá strana Gaussovej-Ostrogradského vety nadobudne tvar $(\text{div } \mathbf{A})V$. Po prevedení objemu V na druhú stranu rovnice dostaneme výsledok:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} . \quad (1.4.3.5)$$

Na základe tohto vzťahu možno funkciu $\operatorname{div} \mathbf{A}$ interpretovať ako výtok vektorovej funkcie $\mathbf{A}$ z uzavretej plochy pripadajúci na jednotkový objem (= výtok z jednotkového objemu).

Príklad 1.4.3.1 Vypočítajte plošný integrál funkcie $\mathbf{A} = K (\mathbf{r}/r^3)$ cez guľovú plochu s polomerom R , ktorej stred je umiestnený do začiatku súradnicovej sústavy (K je konštanta, $\mathbf{r}$ polohový vektor, r jeho veľkosť).



Obr. 1.4.3.2

Riešenie: Pri počítaní integrálu (1.4.3.3) si uvedomíme, že vektory $\mathbf{r}$ a $d\mathbf{S}$ sú v každom bode povrchu gule rovnobežné, preto skalárny súčin

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = K (\mathbf{r} / r^3) \cdot d\mathbf{S} = K (1/r^3) \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = K (1/r^3) r dS = K (1/r^2) dS ,$$

pričom na povrchu gule $r = R$. Preto

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint (K/R^2) dS = (K/R^2) \oint dS = (K/R^2) 4\pi R^2 = 4\pi K ,$$

lebo plošný integrál z dS cez celý povrch gule je $4\pi R^2$.

Kontrolné otázky

1. Čo rozumiete pod plošným integrálom vektorovej funkcie?
2. Napíšte a slovne vyjadrite Gaussovu - Ostrogradského integrálnu vetu.

DODATKY

D1 Definícia vektorovej veličiny

Z fyzikálneho pohľadu sa vektorové veličiny charakterizujú ako veličiny, ktoré sa vyznačujú veľkosťou aj smerom. Túto jednoduchú „definíciu“ vektorovej veličiny možno nájsť v mnohých učebniciach fyziky. Vyjadrenia tohto druhu sú iba kvalitatívne, takže ak sa vektory majú používať pri technických výpočtoch, najmä s využitím výpočtovej techniky, treba ich definovať kvantitatívne. Taký spôsob definície sa nachádza zvyčajne v učebniciach matematiky. Napríklad v knihe K. Rektorys a kol.: Přehled užití matematiky, (SNTL Praha 1973), sa vektory v trojrozmernom priestore definujú takto:

Uspořádané trojice reálných čísel, pro které jsou definovány

a) rovnost: $(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3)$, je-li $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$

b) součet: $(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

c) suočin trojice s číslem: $k(a_1, a_2, a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3)$

nazývame vektory.

Vektor je tak zavedený pomocou trojice čísel – označovaných ako *súradnice vektora*. Znalosť súradníc umožňuje získať o vektore ďalšie informácie zaujímavé z fyzikálneho i technického hľadiska. Ak začiatok vektora umiestnime do začiatku súradnicovej sústavy, tak trojica čísel predstavuje súradnice jeho koncového bodu. Pomocou trojice čísel (a_1, a_2, a_3) vzťahujúcich sa na konkrétnu karteziánsku sústavu je jednoznačne určená veľkosť a vektora $\mathbf{a} \equiv (a_1, a_2, a_3)$ ($\rightarrow$ vzťahy 1.1.4.3, 1.1.4.4):

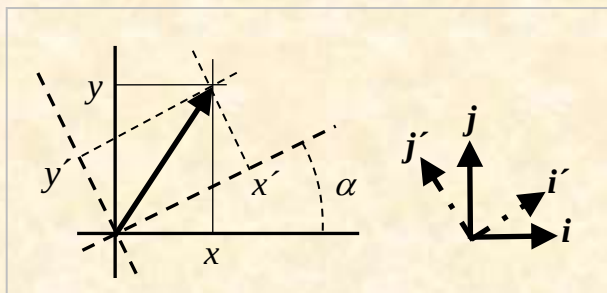
$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

ako aj jeho smer uhlami α, β, γ , ktoré vektor $\mathbf{a}$ zvierá so súradnicovými osami:

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{a}, \quad \cos \beta = \frac{a_2}{a}, \quad \cos \gamma = \frac{a_3}{a}.$$

Pri riešení úloh v ktorých sa používajú vektory, často prichádza do úvahy zmena súradnicovej sústavy, t.j. transformácia vektora do inej sústavy. Vychádza sa pritom z predstavy, že veľkosť vektora sa transformáciou nezmení, ale zmenia sa uhly, ktoré vektor zvierá so súradnicovými osami

novej sústavy a tým aj jeho súradnice. Vzťah medzi pôvodnými a novými súradnicami je determinovaný práve zachovaním veľkosti vektora. Ten sa dá jednoducho a názorne



získať v dvojrozmernom priestore, teda v rovine, ak ide o dve navzájom pootočené súradnicové sústavy so spoločným začiatkom. Na obrázku je znázornený vektor $\mathbf{a}$ v dvoch súradnicových sústavách, vzájomne pootočených o uhol α , v ktorých má súradnice (x, y) , resp. v čiarkovanej sústave (x', y') . Ak jednotkové vektory v týchto sústavách označíme ako $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ resp. $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$, potom vektor $\mathbf{a}$ v týchto sústavách vyjadríme vzťahmi:

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad \text{resp.} \quad \mathbf{a} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}'.$$

Keďže ide o ten istý vektor, musí platiť rovnosť

$$x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Táto rovnosť umožňuje vypočítať nové – čiarkované – súradnice pomocou pôvodných nečiarkovaných súradníc. Keď je čiarkovaná sústava pootočená o uhol α , tak takýto uhol zvierá vektor $\mathbf{i}'$ s vektorom $\mathbf{i}$, ako aj vektor $\mathbf{j}'$ s vektorom $\mathbf{j}$. Súradnicu x' potom získame, keď celú rovnosť vynásobíme skalárne jednotkovým vektorom $\mathbf{i}'$:

$$\mathbf{i}' \cdot (x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}') = \mathbf{i}' \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}).$$

Pri výpočte využijeme vlastnosti skalárneho súčinu vektorov:

$$\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}' = 1, \quad \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}' = 0, \quad \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} = \cos \alpha, \quad \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha,$$

a tak dostaneme:

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha.$$

Vynásobením rovnosti vektorom $\mathbf{j}'$ získame súradnicu

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Keď sa vektory zapisujú ako stĺpcové matice $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tak uvedená transformácia sa zapisuje ako maticový súčin:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

v ktorom sa uplatňujú príslušné pravidlá násobenia matíc. Štvorcová transformačná matica reprezentujúca transformácie vektorov zachovávajúce ich veľkosť má tú významnú vlastnosť, že hodnota jej determinantu sa pri rotáciách o ľubovoľný uhol rovná +1, pri zrkadleniach -1. V trojrozmernom priestore to platí rovnako, pričom transformácia vektorov sa zapisuje vo všeobecnom tvare takto:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

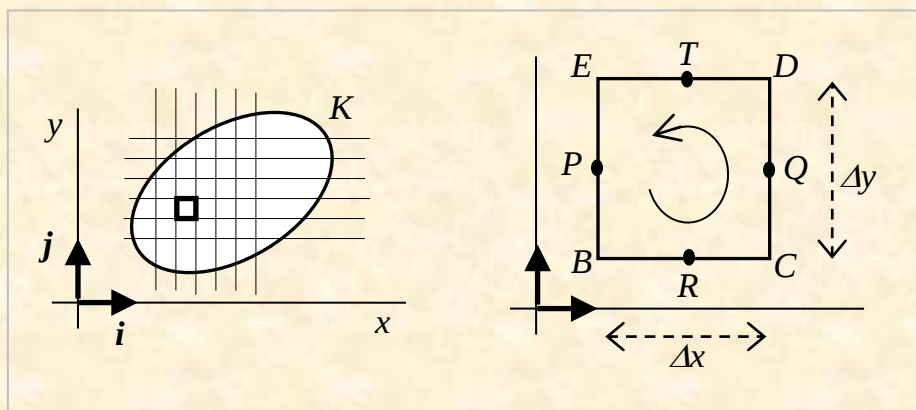
Zo zápisu tejto matice sa dá vyčítať smer osi otočenia vektora, uhol otočenia a pri zrkadleniach smer normály na zrkadlovú rovinu.

D2 Stokesova veta, zjednodušené odvođenje

Dôkaz správnosti Stokesovej vety

$$\oint_K \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1)$$

je matematicky náročný, tu je uvedený iba zjednodušený postup, ktorý priblíži jej odvođenje. Budeme predpokladať, že uzavretá integračná krivka K leží v jednej rovine, napr. roviny súradníc x, y karteziánskej sústavy. Plochu ohraničenú uzavretou krivkou rozdelíme na malé štvorčky rovnobežnými priamkami (na obrázku), takže strany štvorčeka majú dĺžky $\Delta x = \Delta y$. Vypočítame cirkuláciu vektorovej funkcie $\mathbf{A}(x, y, z) = iA_x + jA_y + kA_z$ okolo jedného z nich.



Vrcholy tohto štvorčeka sú označené písmenami B, C, D, E , pričom tieto vrcholy majú súradnice

$$B(x, y, z), C(x + \Delta x, y, z), D(x + \Delta x, y + \Delta y, z), E(x, y + \Delta y, z).$$

Štvorčeky sú veľmi malé a preto predpokladáme, že vektorová funkcia sa pozdĺž ich strán príliš nemení. Krivkový integrál vektorovej funkcie $\mathbf{A}$ pozdĺž strany štvorčeka vyjadríme ako skalárny súčin vektora predstavujúceho dĺžku strany a vektorovej funkcie s jej hodnotou uprostred strany štvorčeka. Napríklad integrál medzi bodmi B a C nahradíme výrazom

$$\int_B^C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{A}_R \cdot (\Delta x \mathbf{i}) = A_{xR} \Delta x,$$

kde $\mathbf{A}_R$ je vektorová funkcia v bode R , A_{xR} jej x -ová súradnica v tomto bode. Po skalárnom súčine funkcie $\mathbf{A}$ s jednotkovým vektorom $\mathbf{i}$ zostala z nej iba príslušná súradnica. Podobne nahradíme integrály pozdĺž ostatných strán štvorčeka:

$$\int_C^D \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{A}_Q \cdot (\Delta y \mathbf{j}) = A_{yQ} \Delta y, \quad \int_D^E \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{A}_T \cdot (-\Delta x \mathbf{i}) = -A_{xT} \Delta x$$

$$\int_E^B \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{A}_P \cdot (-\Delta y \mathbf{j}) = -A_{yP} \Delta y$$

Sčítaním všetkých štyroch integrálov, resp. ich náhrad, dostaneme výraz vyjadrujúci cirkuláciu vektorovej funkcie $\mathbf{A}$ okolo štvorčeka s vrcholmi B, C, D, E :

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = (A_{xR} - A_{xT})\Delta x + (A_{yQ} - A_{yP})\Delta y. \quad (2)$$

Veličiny A_{xR} a A_{xT} sú súradnice vektorovej funkcie v dvoch blízkych bodoch, líšiacich sa iba súradnicou y (o Δy), takže ich vzájomnú súvislosť možno vyjadriť pomocou Taylorovho radu, pričom vzhľadom na blízkosť bodov T a R vyššie členy radu zanedbáme:

$$A_{xT} = A_{xR} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta y \quad \Rightarrow \quad A_{xR} - A_{xT} = -\frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta y.$$

Podobne

$$A_{yQ} = A_{yP} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x \quad \Rightarrow \quad A_{yQ} - A_{yP} = \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x.$$

Po dosadení do rovnice (2) dostaneme:

$$\oint_{BCDE} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x \Delta y - \frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta y \Delta x = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y. \quad (3)$$

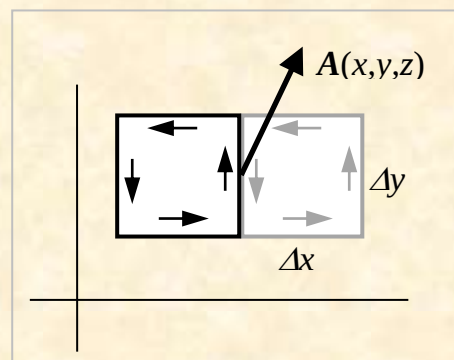
Výraz v zátvorke predstavuje z -ovú súradnicu vektora $\text{rot } \mathbf{A}$ (pozri časť 1.3.5), a súčin $\Delta x \Delta y$ plošný obsah štvorčeka, ktorý označíme symbolom ΔS_{xy} . Ak štvorček nemá špeciálne uloženie v súradnicovej sústave aké sme doteraz predpokladali, pri výpočte cirkulácie vektorovej funkcie $\mathbf{A}$ dostaneme aj ďalšie dva členy, podobné výsledku (3), a ich sčítaním pre cirkuláciu C okolo štvorčeka získame výsledok:

$$C = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta S_{xy} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Delta S_{yz} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \Delta S_{zx} = (\text{rot } \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{S}). \quad (4)$$

Cirkulácia vektorovej funkcie po obode malého štvorčeka sa teda rovná skalárnemu súčinu jej rotácie s vektorom priradeným ploche štvorčeka ($\Delta \mathbf{S} = \Delta S_{yz} \mathbf{i} + \Delta S_{zx} \mathbf{j} + \Delta S_{xy} \mathbf{k}$):

$$C = (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \Delta \mathbf{S}. \quad (5)$$

Pri počítaní cirkulácie okolo dvoch susedných štvorčekov majú príspevky na spoločnej strane štvorčekov opačné znamienka (šípky na obrázku ukazujú smer integrovania v susedných štvorčekoch). To znamená, že ak počítame cirkuláciu po spoločnom obode (obálke) susediacich štvorčekov, výsledok sa rovná súčtu cirkulácií okolo samostatných štvorčekov, lebo príspevok od



spoločnej strany sa rovná nule. To možno využiť pri počítaní cirkulácie po ľubovoľnej uzavretej priestorovej krivke. Preto sa cirkulácia vektorovej funkcie rovná súčtu elementárnych príspevkov (5). V limitnom prípade, keď sa malá plôška $\Delta \mathbf{S}$ nahradí elementárnou plôškou $d\mathbf{S}$, príspevky $(\text{rot } \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$ sa sčítajú, t.j. integrujú po celej ploche ohraničenej uzavretou integračnou krivkou. Z toho vyplýva rovnosť krivkového a plošného integrálu:

$$\oint_K \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

čo je obsahom Stokesovej vety.

D3 Tok vektorovej veličiny

Tento názov má pôvod v hydromechanike. Ak sa potrubím pohybuje kvapalina rýchlosťou $\mathbf{v}$, potom integrál

$$T = \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (1)$$

vyjadruje objem kvapaliny, ktorý za jednotku času pretečie plochou S . V priaznivom prípade, keď vektor $\mathbf{v}$ je v celom priereze potrubia rovnaký a súhlasne rovnobežný s vektorom $d\mathbf{S}$, integrál (1) vyjadrujúci tok T sa zjednoduší:

$$T = \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = v \iint_S dS = vS.$$

Z výsledku vyplýva, že rozmer veličiny T sa rovná:

$$[T] = \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{m}^2 = \frac{\text{m}^3}{\text{s}},$$

takže naozaj ide o objem ktorý pretečie plochou S za sekundu.

Význam veličiny T možno zdôvodniť aj podrobnejšie. Ak sa celým prierezom S potrubia kvapalina pohybuje rýchlosťou v , za časový interval Δt sa kvapalina posunie o $\ell = v\Delta t$. Prierezom S tak za časový interval Δt pretečie objem kvapaliny $\Delta V = S\ell = S v\Delta t$. Objem, ktorý pretečie za jednotku času (objemový prietok)

$$q_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = Sv.$$

Ak rýchlosť v nie je v celom priereze rovnaká, potom

$$q_V = \iint_S v dS.$$

Ak plocha rezu v potrubí nie je postavená kolmo na vektor rýchlosti $\mathbf{v}$ prúdenia kvapaliny, potom pri výpočte objemového prietoku treba prihliadať aj na vzájomný uhol medzi vektormi $\mathbf{v}$ a $d\mathbf{S}$, ktorý je obsiahnutý v skalárnom súčine týchto veličín:

$$q_V = \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}.$$

Ak máme iné vektorové pole, napríklad pole vektorovej veličiny $\mathbf{A}$, potom integrál

$$T = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

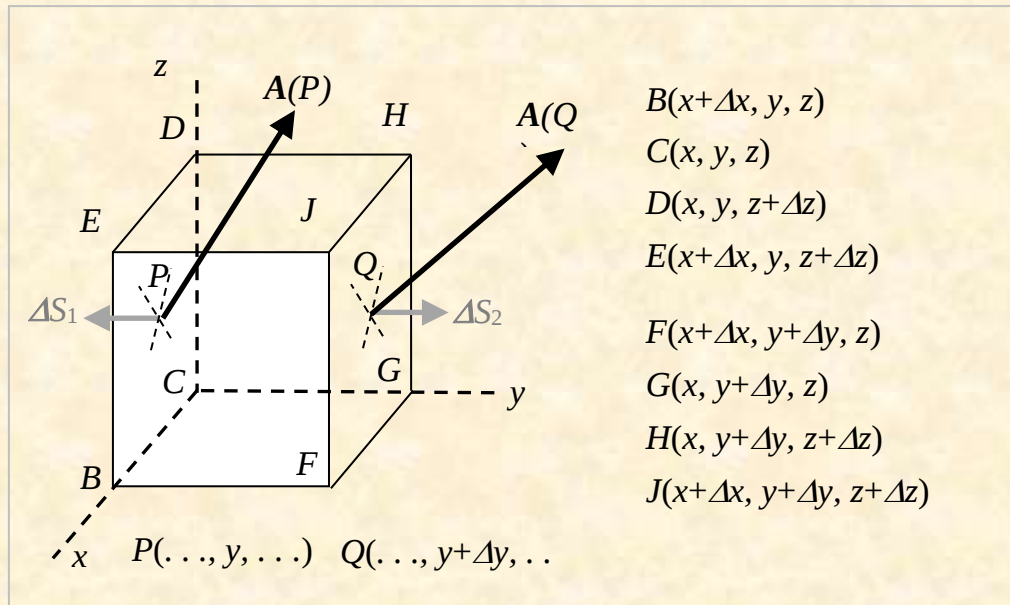
predstavuje tok vektora $\mathbf{A}$ cez plochu S .

D4 Gaussova - Ostrogradského veta, zjednodušené odvodenie

Premenu plošného integrálu na objemový možno zjednodušeným spôsobom ilustrovať na príklade malej kocky nachádzajúcej sa v priestore, kde je definovaná vektorová funkcia priestorových súradníc

$$\mathbf{A}(x, y, z) = i A_x(x, y, z) + j A_y(x, y, z) + k A_z(x, y, z). \quad (1)$$

Kocku umiestnime tak, aby jej hrany boli rovnobežné so súradnicovými osami karteziánskej sústavy.



Budeme počítať plošný integrál vektorovej funkcie $\mathbf{A}$ cez uzavretú plochu tvorenú šiestimi stenami kocky. Najprv vypočítame plošné integrály cez steny ohraničené vrcholmi $BCDE$ (stena č.1) a $FGHI$ (stena č.2). Hrany kocky majú dĺžky Δx , Δy a Δz , takže plošný obsah uvedených stien je $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta x \cdot \Delta z$. Predpokladáme že kocka je dostatočne, takmer diferenciálne malá, takže funkcia $\mathbf{A}$ sa v rôznych bodoch steny kocky veľmi nelíši, je temer konštantná. Potom tok funkcie $\mathbf{A}$ cez stenu kocky môžeme dostatočne dobre nahradiť skalárnym súčinom $T = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{S}$, kde dosadíme hodnotu vektorovej funkcie zo stredu plôšky (teda jej hodnoty v bodoch P resp. Q). Vektory priradené plochám vyjadríme pomocou jednotkového vektora $\mathbf{j}$. Súčet tokov funkcie $\mathbf{A}$ cez obe steny kocky sa potom rovná súčtu

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 &= \mathbf{A}_P \cdot \Delta \mathbf{S}_1 + \mathbf{A}_Q \cdot \Delta \mathbf{S}_2 = \mathbf{A}_P \cdot (-\mathbf{j} \Delta x \Delta z) + \mathbf{A}_Q \cdot (\mathbf{j} \Delta x \Delta z) = \\ &= \Delta x \Delta z (\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{A}_Q - \mathbf{A}_P). \end{aligned}$$

Po skalárnom súčine vektorovej funkcie (1) s jednotkovým vektorom $\mathbf{j}$ zostane z nej iba y-ová súradnica, takže predchádzajúci vzťah nadobudne tvar

$$T_1 + T_2 = (\Delta x \Delta z)(A_{yQ} - A_{yP}). \quad (2)$$

Keďže body P a Q sú blízke, rozdiel súradníc $A_{yQ} - A_{yP}$ možno aproximovať pomocou prvého člena Taylorovho radu (ostatné členy sú zanedbateľne malé):

$$(A_{yQ} - A_{yP}) = \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y.$$

Tento vzťah dosadíme do rovnice (2), čím dostaneme

$$T_1 + T_2 = (\Delta x \Delta z)(A_{yQ} - A_{yP}) = \frac{\partial A_y}{\partial y} (\Delta y \Delta x \Delta z) = \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta \tau,$$

kde $\Delta \tau$ je objem malej kocky. Výpočet tokov cez ďalšie navzájom protiľahlé steny vedie k výsledkom

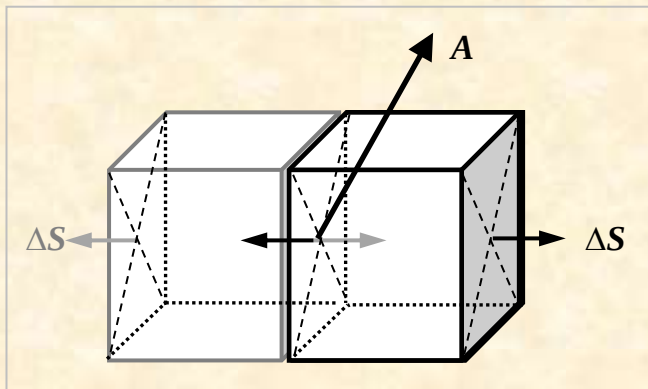
$$T_3 + T_4 = \frac{\partial A_x}{\partial x} (\Delta y \Delta x \Delta z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta \tau, \quad T_5 + T_6 = \frac{\partial A_z}{\partial z} (\Delta y \Delta x \Delta z) = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta \tau.$$

Súčet tokov cez všetky steny kocky poskytne výsledok

$$\sum_{k=1}^6 T_k = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta \tau = \operatorname{div} \mathbf{A} \Delta \tau, \quad (3)$$

pričom v limitnom prípade, keď kocka nadobudne elementárne rozmery, namiesto $\Delta \tau$ vo výsledku bude $d\tau$.

Gaussova - Ostrogradského veta však vyjadruje tok cez makroskopickú uzavretú plochu. Objem ohraničený ľubovoľnou uzavretou plochou sa dá zaplniť elementárnymi kockami. Pri sčítavaní tokov cez susedné elementárne kocky majú toky cez spoločnú stenu rovnakú veľkosť, ale opačné znamienka. Vidno to na obrázku, podľa ktorého skalárne súčiny vektorovej funkcie $\mathbf{A}$ s vektormi $\Delta \mathbf{S}$ prislúchajúcimi sivej resp. čiernej kocke, majú na spoločnej stene opačné znamienka. To znamená, že tok cez obálku viacerých dotýkajúcich sa kociek sa rovná súčtu tokov cez povrchy jednotlivých kociek. Výsledkom sčítania tokov cez povrchy všetkých elementárných kociek vyplňajúcich objem ohraničený makroskopickou uzavretou plochou je integrál



$$T = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4)$$

Na druhé straně součet výrazů $\operatorname{div} \mathbf{A} \, d\tau$ přes objem ohraničený uzavřitou plochou je objemový integrál

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, d\tau . \quad (5)$$

Rovnost výrazů (4) a (5) představuje Gaussovu - Ostrogradského větu:

$$\oiint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, d\tau .$$

SLOVNÍK

absolútna hodnota vektora = veľkosť vektora

báza vektorov vzt'aznej sústavy – trojica zvyčajne jednotkových vektorov, ktoré určujú smer súradnicových osí vzt'aznej sústavy v trojrozmernom priestore; v rovine báza pozostáva z dvoch vektorov

cirkulácia vektorovej funkcie – krivkový integrál vektorovej funkcie po uzavretej krivke: $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$

derivácia vektorovej funkcie – vektorovú funkciu možno derivovať podľa času alebo podľa priestorových premenných ($\rightarrow$ gradient, divergencia, rotácia); derivácia podľa času t je definovaná vzťahom

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1}{t_2 - t_1},$$

kde $\mathbf{A}_1$ a $\mathbf{A}_2$ sú hodnoty vektorovej funkcie v časových okamihoch t_1 resp. t_2 ; čitateľ zlomku udáva smer zmeny vektorovej funkcie, celý zlomok vyjadruje zmenu vektorovej funkcie pripadajúcu na jednotku času

divergencia vektorovej funkcie – operácia, ktorej výsledkom je skalárna funkcia definovaná vzťahom $S(x, y, z) = \operatorname{div} \mathbf{A}(x, y, z) = \nabla \cdot \mathbf{A}(x, y, z)$; je to aplikácia operátora nabla na vektorovú funkciu prostredníctvom skalárneho súčinu

dvojnásobný vektorový súčin – vektorový súčin troch vektorov typu $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$, alebo $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, ktorého výsledkom je vektor; výsledný vektor vždy leží v rovine určenej vektormi v zátvorke, preto sa vyjadruje ako ich lineárna kombinácia:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

Gaussova (integrálna) veta – premena plošného integrálu vektorovej funkcie po uzavretej ploche na objemový integrál divergencie tejto funkcie cez objem ohraničený uzavretou plochou: $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint \operatorname{div} \mathbf{A} d\tau$, kde $d\tau$ predstavuje objemový element, ktorý v karteziánskej súradnicovej sústave má tvar $d\tau = dx dy dz$

gradient skalárnej funkcie – vektorová funkcia $\mathbf{A}(x, y, z)$ priestorových premenných, definovaná vzťahom

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\partial S}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial S}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial S}{\partial z} \mathbf{k} = \nabla S,$$

kde $S(x, y, z)$ je skalárna funkcia, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ jednotkové vektory charakterizujúce smer súradnicových osí a ∇ je nabla-operátor

jednotkový vektor – vektor, ktorého veľkosť sa rovná číslu 1, je teda bezrozmerový

kolineárne vektory – navzájom rovnobežné vektory aj rôznych veľkostí, ktoré majú rovnaký, alebo aj opačný smer

komplanárne vektory – minimálne tri vektory, vo všeobecnosti rôznych veľkostí, ktoré ležia v jednej rovine, alebo sú s ňou rovnobežné

koniec vektora – bod na úsečke zobrazujúcej vektor označovaný šípkou; voľbou začiatku a konca úsečky určujeme jej smer; ak sa začiatok vektora nachádza v začiatku súradnicovej sústavy, poloha konca vektora je určená súradnicami vektora

krivkový integrál vektorovej funkcie – integrál vyjadrený zvyčajne v tvare

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz),$$

kde $\mathbf{F}(x, y, z)$ je vektorová funkcia troch premenných

lineárna kombinácia vektorov – vektorový súčet skalárnych násobkov konečného počtu vektorov: $\mathbf{v} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b} + r\mathbf{c} + s\mathbf{d} + \dots$, kde p, q, r, s sú skaláry; v trojrozmernom priestore lineárnou kombináciou troch nekomplanárnych vektorov (obyčajne vektorov bázy) možno vyjadriť ľubovoľný vektor, napríklad polohový vektor: $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

nabla-operátor, Hamiltonon operátor nabla – diferenciálno-vektorový operátor $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$; používa sa pri operáciách gradient, divergencia a rotácia, kde sa s ním popri diferenciálnych operáciách narába ako s vektorom

plošný integrál vektorovej funkcie – najčastejšie integrál typu $\iint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$; za znakom integrálu je skalárny súčin vektorovej funkcie $\mathbf{A}$ s diferenciálom $d\mathbf{S}$ ktorý ako vektor je kolmý na príslušnú elementárnu plošku a jeho veľkosť predstavuje jej plošný obsah; takémuto integrálu sa hovorí *tok vektora $\mathbf{A}$ cez plochu S* ; diferenciál plochy $d\mathbf{S}$ možno v karteziánskej súradnicovej sústave vyjadriť ako

$$d\mathbf{S} = \mathbf{i} dy dz + \mathbf{j} dz dx + \mathbf{k} dx dy,$$

a skalárny súčin $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ v tvare: $A_x dy dz + A_y dz dx + A_z dx dy$

pravotočivá sústava troch vektorov – nekomplanárna trojica vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ s takto definovaným poradím tvorí pravotočivú sústavu, ak z konca vektora $\mathbf{c}$ sa stotožnenie prvého vektora (t.j. v tomto prípade vektora $\mathbf{a}$) s druhým vektorom po kratšom oblúku javí ako jeho pohyb proti chodu hodinových ručičiek

priemet vektora – operácia, ktorej výsledkom je vektor; ak premietame vektor $\mathbf{a}$ do smeru vyjadreného jednotkovým vektorom $\mathbf{j}$, pre priemet $\mathbf{p}$ platí $\mathbf{p} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j}$

rotácia vektorovej funkcie – operácia, ktorej výsledkom je vektorová funkcia definovaná vzťahom $\mathbf{B}(x, y, z) = \text{rot } \mathbf{A}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{A}(x, y, z)$; je to aplikácia nabla-operátora na vektorovú funkciu prostredníctvom vektorového súčinu

rovnosť dvoch vektorov – dva vektory sú rovnaké, ak majú rovnaký smer aj veľkosť

rozdiel dvoch vektorov – operácia $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, ktorá sa uskutočňuje ako súčet $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$, pričom vektor $-\mathbf{b}$ má rovnakú veľkosť ako vektor $\mathbf{b}$, ale opačný smer

skalárna funkcia – funkcia zvyčajne troch priestorových premenných x, y, z , t.j. $S(x, y, z)$, ktorá každému bodu vymedzenej časti priestoru priradí skalárnu veličinu; napríklad teplota v miestnosti, potenciál v elektrickom poli; jej hodnoty môžu závisieť aj od štvrtej premennej – času t : $S(x, y, z, t)$

skalárna veličina, skalár – fyzikálna veličina, ktorá je úplne určená svojou číselnou hodnotou a príslušnou jednotkou

skalárny násobok vektora = násobenie vektora (vektorovej veličiny) skalárnou veličinou (skalárom s) – operácia, ktorou sa získa vektorová veličina, ktorej rozmer sa rovná súčinu rozmerov násobených veličín, a ktorej veľkosť je s - násobkom veľkosti pôvodnej vektorovej veličiny (vektora); ak $s < 0$, smer výsledného vektora je opačný ako smer násobeného vektora

skalárny súčin vektorov $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ – operácia medzi dvoma vektormi, ktorej výsledkom je skalárna veličina, a ktorú získame ako súčin veľkostí vektorov a kosínusu uhla nimi zovretého: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \alpha$

smer vektora – parameter charakterizujúci vektorovú veličinu, odlišujúci ho od skalárnej veličiny; v karteziánskej sústave sa vyjadruje pomocou uhlov, ktoré vektor zvierá so súradnicovými osami; v geometrickej interpretácii sa reprezentuje smerom orientovanej úsečky, zobrazujúcej príslušný vektor

smerový kosínus – kosínus smerového uhla

smerový uhol – uhol medzi vektorom a súradnicovou osou karteziánskej súradnicovej sústavy; v trojrozmernom priestore má každý vektor tri smerové uhly

Stokesova veta – veta o premene krivkového integrálu funkcie $\mathbf{A}$ pozdĺž uzavretej krivky na plošný integrál rotácie funkcie $\mathbf{A}$ po ploche ohraničenej touto uzavretou krivkou:

$$\oint_K \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S};$$

tvár plochy pritom nie je presne definovaný, môže to byť časť roviny, ale aj iná plocha, napríklad časť guľovej plochy, elipsoidu, či inej komplikovanejšej plochy

súčet vektorov – operácia, ktorou vznikne tretí – výsledný vektor; geometricky sa súčet zobrazuje tak, že ku koncu prvého vektora sa pripojí začiatok druhého vektora a výsledný vektor sa získa spojením začiatku prvého s koncom druhého vektora, čím vznikne tzv. vektorový trojuholník; pri vyjadrení vektorov pomocou trojíc súradníc, súradnice výsledného vektora sa rovnajú súčtu príslušných súradníc sčítovaných vektorov; sčítovať možno aj viac vektorov, pričom uvedený postup sa opakuje, čím vznikne vektorový mnohoúholník

súradnica vektora – kladný, nulový, alebo záporný skalár (= skalár s rozmerom reprezentovanej veličiny), predstavujúci súradnicu koncového bodu vektora na niektorej zo súradnicových osí; skalárnym násobkom príslušného jednotkového vektora súradnicou vektora sa získa zložka vektora v smere príslušnej súradnicovej osi; v trojrozmernom priestore má vektor tri súradnice

tok vektora cez plochu → plošný integrál vektorovej funkcie

uhol medzi vektormi – uhol zvieraný dvoma vektormi, ktorý sa najlepšie posúdi, keď sa ich začiatkové body stotožnia; podľa definície (dohody) môže nadobúdať hodnoty z intervalu $< 0^\circ, 180^\circ >$, takže nemôže byť väčší než π rad (180°)

veľkosť vektora – kladná (nezáporná) skalárna veličina, vyjadrená v jednotkách príslušnej vektorovej veličiny

vektorová funkcia – funkcia zvyčajne troch priestorových premenných x, y, z , t.j. $\mathbf{A}(x, y, z)$, ktorá každému bodu vymedzenej časti priestoru priradí vektorovú veličinu, teda jej veľkosť aj smer; pri vyjadrení pomocou zložiek má tvar

$\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{i} A_x(x, y, z) + \mathbf{j} A_y(x, y, z) + \mathbf{k} A_z(x, y, z)$, kde A_x, A_y, A_z sú skalárne funkcie - súradnice vektorovej funkcie; môže závisieť aj od času t : $\mathbf{A}(x, y, z, t)$; príklad: rozloženie rýchlosti prúdenia vzduchu v miestnosti

vektorová veličina, vektor – fyzikálna veličina, pri ktorej okrem veľkosti a príslušnej jednotky, treba zadať aj jej smer

vektorový súčin dvoch vektorov $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ – operácia, ktorej výsledkom je vektor $\mathbf{c}$; veľkosť vektora $\mathbf{c}$ je definovaná ako súčin veľkostí vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ a sínusu uhla nimi zovretého; výsledný vektor je podľa definície kolmý na rovinu vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ a v poradí $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tvorí s nimi pravotočivú sústavu

začiatok vektora – pri geometrickej interpretácii bod na začiatku úsečky, ktorou sa vektor zobrazuje; koniec vektora sa vyznačuje šípkou na úsečke

záporný vektor – nevhodný názov pre vektor, pred ktorým je vyznačené znamienko mínus; znamienkom sa vyjadruje zmena na opačný smer vektora

zložky vektora – vektory, na ktoré sa daný vektor dá rozložiť, takže ich sčítaním vznikne pôvodný vektor; smery jednotlivých zložiek v rovine alebo priestore môžu byť ľubovoľné, ale najčastejšie sa volia v zhode so smermi súradnicových osí vybranej súradnicovej sústavy; významné sú tri zložky vektorov v karteziánskej súradnicovej sústave, ktoré sú skalárnymi násobkami príslušných jednotkových vektorov

zmiešaný súčin vektorov – súčin troch vektorov typu $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$, alebo $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, ktorého výsledkom je skalárna veličina; najprv treba vykonať vektorový súčin vektorov v zátvorke, čím vznikne vektor, ktorý treba vynásobiť skalárne tretím vektorom; zmiešaný súčin má význam objemu rovnobežnostena skonštruovaného na základe vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$

ÚLOHY

1. Aký vektor $\mathbf{b}$ treba pripočítať k vektoru $\mathbf{a}$, aby výsledný vektor $\mathbf{c}$ bol rovnako veľký ako vektor $\mathbf{a}$, ale mal opačný smer? *Výsledok: $\mathbf{b} = -2\mathbf{a}$.*
2. Ak $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, aký vektor $\mathbf{b}$ treba k nemu pripočítať, aby výsledný vektor $\mathbf{c}$ mal dvojnásobnú veľkosť ako vektor $\mathbf{a}$, ale mal opačný smer?
Výsledok: $\mathbf{b} = -9\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.
3. Akú veľkosť má vektor $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$? *Výsledok: $a = \sqrt{14}$.*
4. Napíšte vektor $\mathbf{c}$, ktorý má päťnásobnú veľkosť ako vektor $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$!
Výsledok: $\mathbf{a} = 15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.
5. Uhlopriečky rovnobežníka sú zadane ako vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$. Pomocou nich vyjadrite strany rovnobežníka $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. *Výsledok: $\mathbf{a} = (1/2)(\mathbf{u} + \mathbf{v})$, $\mathbf{b} = (1/2)(\mathbf{u} - \mathbf{v})$.*
6. Napíšte jednotkový vektor $\boldsymbol{\eta}$, ktorý má opačný smer ako vektor $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.
Výsledok: $\boldsymbol{\eta} = -\mathbf{a} / \sqrt{45} = (-5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) / \sqrt{45}$
7. Trojuholník je určený tromi vrcholmi A, B, C , ktorých polohové vektory sú $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, pričom $\mathbf{a} = 0$. Vyjadrite vektor predstavujúci ťažnicu trojuholníka
a) vychádzajúcu z vrcholu A , b) vychádzajúcu z vrcholu B .
c) Vyjadrite polohový vektor ťažiska trojuholníka.
Výsledok: a) $(1/2)(\mathbf{b} + \mathbf{c})$, b) $\mathbf{c}/2 - \mathbf{b}$, c) $(1/3)(\mathbf{b} + \mathbf{c})$.
8. Hrany kvádra sú zadane ako vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.
a) Vyjadrite všetky uhlopriečky kvádra ako vektory pomocou vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.
b) Ak $\mathbf{a} = 2\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ a $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, vypočítajte dĺžky uhlopriečok .
*Výsledok: a) $\mathbf{u}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{c} - (\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{b} - (\mathbf{a} + \mathbf{c})$, $\mathbf{u}_4 = \mathbf{a} - (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
b) $u_1 = \sqrt{34}$, $u_2 = \sqrt{14}$, $u_3 = \sqrt{14}$, $u_4 = \sqrt{18}$.*
9. Zadane sú dva vektory $\mathbf{a} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{v}$, pričom vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ nie sú rovnobežné. Vyjadrite vektor $\mathbf{c} = 4\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.
Výsledok: $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + (3/2)\mathbf{b}$.
10. Posúďte, či vektor $\mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ a $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. *Výsledok: Nemožno.*
11. Vyjadrite vektor $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ a $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$. *Výsledok: $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$.*

12. Bodmi A a B je zadaná priamka, pričom ich polohové vektory sú $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.
Vyjadrite polohový vektor $\mathbf{r}$ ľubovoľného bodu ležiaceho na tejto priamke.
Výsledok: $\mathbf{r} = \mathbf{a} + s(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, s je voliteľný skalárny parameter (reálne číslo).
13. Kedy sú uhlopriečky rovnobežníka na seba kolmé? Vyjadrite to pomocou vektorov $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vyjadrujúcich strany rovnobežníka.
Výsledok: Keď $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, t.j. ide o kosoštvorec.
14. Zadané sú dva vektory $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Vypočítajte
a) skalárny súčin týchto vektorov,
b) uhol medzi týmito vektormi.
c) Na základe výsledku posúďte, či uhol medzi vektormi závisí od veľkosti tretej zložky vektora $\mathbf{b}$. Výsledok: a) 0, b) 90° , c) nezávisí.
15. Odvesny pravouhlého trojuholníka v karteziánskej sústave sú vyjadrené ako vektory $\mathbf{a} = 4\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{j}$. Pomocou skalárneho súčinu vypočítajte veľkosť ostrých uhlov v tomto trojuholníku. Výsledok: $\alpha = 53,13^\circ$, $\beta = 36,87^\circ$.
16. Aké uhly zvierá vektor $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ so súradnicovými osami karteziánskej sústavy? Výsledok: $\alpha = 36,7^\circ$, $\beta = 122,3^\circ$, $\gamma = 74,5^\circ$.
17. Vyjadrite priemet $\mathbf{p}$ vektora $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ do vektora $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Zvážte, či tento priemet môže mať zložku rovnobežnú s jednotkovým vektorom $\mathbf{k}$.
Výsledok: $\mathbf{p} = (3/25)\mathbf{i} + (4/25)\mathbf{j}$, nemôže mať zložku rovnobežnú s $\mathbf{k}$.
18. Vypočítajte uhol, ktorý zvierajú telesová a stenová uhlopriečka kocky, vychádzajúce z jedného jej vrcholu. Výsledok: $\varphi = 35,26^\circ$.
19. Vyjadrite priemet vektora predstavujúceho telesovú uhlopriečku kocky do priamky zhodnej s uhlopriečkou základne (hrana kocky má veľkosť a)
a) keď prechádzajú spoločným vrcholom kocky,
b) keď neprechádzajú spoločným vrcholom kocky.
Výsledok: a) $a(\mathbf{i} + \mathbf{j})$, b) 0.
20. Nájdite jednotkový vektor $\mathbf{f}$, ktorý je kolmý na vektor $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ a leží v rovine vektorov $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$. Výsledok: $\mathbf{f} = \pm(\mathbf{i} - 3\mathbf{j})/\sqrt{10}$.
21. Vypočítajte veľkosť uhlov v trojuholníku zadanom karteziánskymi súradnicami jeho vrcholov $A(2,0,2)$, $B(2,2,0)$, $C(0,1,1)$.
Výsledok: $\alpha = 54,74^\circ$, $\beta = 54,73^\circ$, $\gamma = 70,53^\circ$.

22. Vypočítajte plošný obsah S pravouhlého trojuholníka, ktorého jedna odvesna je určená vektorom $\mathbf{a} = 4\mathbf{i}$ a prepona vektorom $\mathbf{c} = 3\mathbf{j} - 4\mathbf{i}$. Súradnice vektorov sú udané v metroch. Výsledok si overte vzorcom na výpočet obsahu trojuholníka.
Výsledok: $S = 6 \text{ m}^2$.
23. Vypočítajte plošný obsah S trojuholníka vytvoreného hranou, stenovou a telesovou uhlopriečkou kocky keď jej hrana má dĺžku a . *Výsledok:* $S = a^2/\sqrt{2}$.
24. Nájdite jednotkový vektor $\mathbf{p}$ kolmý na rovinu prechádzajúcu bodmi A(2,0,0), B(0,1,0), C(0,0,3). *Výsledok:* $\mathbf{p} = \pm(3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k})/7$.
25. Kremík používaný v polovodičových prvkoch má usporiadanie atómov, ktorého základným štruktúrnym útvarom je kocka. Vrcholmi kocky A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1) je v kremíku určená rovina, ktorá sa najčastejšie používa na technologické aplikácie. Aké uhly zvierá táto rovina so stenami kocky? Je to dôležité vedieť pri rezaní monokryštálov kremíka.
Výsledok: So všetkými tromi stenami rovnaký uhol $\varphi = 54,73^\circ$.
26. Šikmá trojuholníková strecha má v karteziánskej sústave súradnice vrcholov A(2,0,2), B(2,2,0), C(0,1,1), pričom súradnice sú udané v metroch. Vypočítajte plošný obsah S strechy. *Výsledok:* $S = 2,83 \text{ m}^2$.
27. Troma bodmi A(2,0,2), B(2,2,0), C(0,1,1) je určená rovina. Vypočítajte vzdialenosť d začiatku súradnicovej sústavy od tejto roviny, keď súradnice bodov sú zadané v metroch. *Výsledok:* $d = \sqrt{2} \text{ m} = 1,414 \text{ m}$.
28. Rozhodnite, či vektory $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ v danom poradí tvoria pravotočivú sústavu.
Výsledok: V danom poradí tvoria ľavotočivú sústavu.
29. Zo začiatku súradnicovej sústavy smerujú tri strely po priamkach do bodov, ktorých polohové vektory sú: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Rozhodnite, či sa strely pohybujú v jednej rovine.
Výsledok: Pohybujú sa v jednej rovine.
30. Vektormi $\mathbf{a} = 2\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ je určený rovnobežnosten. Súradnice vektorov sú udané v metroch. Vypočítajte jeho objem V a plošný obsah povrchu S . *Výsledok:* $V = 12 \text{ m}^3$, $S = 35,82 \text{ m}^2$.
31. Čomu sa rovná dvojnásobný vektorový súčin jednotkových vektorov karteziánskej sústavy $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{k}$?
Výsledok: Rovná sa nule.

32. Ako by mali byť vzájomne orientované tri nekomplanárne vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, aby sa ich dvojnásobný vektorový súčin $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ nerovnal nule?

Výsledok: Vektor $\mathbf{a}$ nesmie byť kolmý na rovinu vektorov $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

33. Koncovými bodmi troch nekomplanárnych vektorov $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ je určená rovina v ktorej sa má pohybovať koncový bod ramena robota.

a) Akú podmienku musí spĺňať polohový vektor $\mathbf{r}$ koncového bodu, aby sa pri pohybe stále nachádzal v uvedenej rovine?

Výsledok: a) $[(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})] \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{a}) = 0$.

34. Vypočítajte uhol, ktorý zvierajú dve roviny, každá určená tromi bodmi – prvá rovina bodmi A(2,0,0), B(0,0,1), C(0,2,1), druhá rovina bodmi D(2,0,0), E(0,2,0), F(0,0,2).

Výsledok: $\varphi = 39,23^\circ$.

35. Karteziánskymi súradnicami troch bodov A(2,0,0), B(0,0,1), C(0,2,0) je určená rovina.

a) Vypočítajte vzdialenosť bodu D(3,2,1) od tejto roviny.

b) Rozhodnite, či bod D leží v rovnakom polpriestore ako začiatok súradnicovej sústavy. Súradnice sú udané v centimetroch!

Výsledok: a) $d = 2,04$ cm b) neležia v jednom polpriestore.

36. Vypočítajte $\text{grad}(\mathbf{r})$, kde $\mathbf{r} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Výsledok: $\text{grad}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} / r$, kde $\mathbf{r} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$.

37. Vypočítajte $\text{grad}(1/r)$, kde $\mathbf{r} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Výsledok: $\text{grad}(1/r) = -\mathbf{r} / r^3$, kde $\mathbf{r} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$.

38. Vypočítajte $\text{grad}(\mathbf{r}^n)$, kde $\mathbf{r} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Výsledok: $\text{grad}(\mathbf{r}^n) = n \mathbf{r}^{n-2} \mathbf{r}$.

39. Ukážte, že úplný diferenciál skalárnej funkcie $S(x,y,z)$:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy + \frac{\partial S}{\partial z} dz$$

sa dá vyjadriť ako skalárny súčin diferenciálu

polohového vektora $d\mathbf{r}$ a gradientu tejto funkcie $\text{grad}(S)$.

Návod: Vykonaajte skalárny súčin uvedených veličín.

40. Vypočítajte gradient súčinu skalárnych funkcií troch premenných $S(x,y,z)$ a $P(x,y,z)$.

Výsledok: $\text{grad}(PS) = P \text{grad}S + S \text{grad}P$.

41. Dokážte, že rotácia vektorovej funkcie, ktorá vznikla aplikáciou nabla-operátora na skalárnu funkciu, sa vždy rovná nule.

Návod: Využite vlastnosť nabla-operátora, ktorý sa v uvedenom výraze dvakrát vyskytuje v úlohe vektora.

42. Vypočítajte výraz $\text{div}(k\mathbf{r})$, kde k je konštanta a $\mathbf{r}$ polohový vektor.

Výsledok: $\text{div}(k\mathbf{r}) = 3k$.

43. Vypočítajte, čomu sa rovná $\text{div}(\mathbf{r}/r^3)$, kde $\mathbf{r}$ je polohový vektor a $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Výsledok: $\text{div}(\mathbf{r}/r^3) = 0$.

44. Vypočítajte, čomu sa rovná rotácia vektorovej funkcie $(\mathbf{a}S)$, kde $\mathbf{a}$ je konštantný vektor a $S(x,y,z)$ skalárna funkcia.

Výsledok: $\text{rot}(\mathbf{a}S) = \mathbf{a} \times \text{grad}S$.

45. Vypočítajte rotáciu výrazu $S\mathbf{r}$, kde $S(x,y,z)$ je skalárna funkcia a $\mathbf{r}$ je polohový vektor.

Výsledok: $\text{rot}(S\mathbf{r}) = 0$.

Zoznam použitej literatúry v zošitkoch

Učebnice

- Ilkovič D.: Vektorový počet, JČMF + Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1950
Garaj J.: Základy vektorového počtu, SVTL, 1957
Ilkovič D.: Fyzika I, II, 4. vydanie, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1968
Horák Z, Krupka F.: Fyzika, SNTL Praha, ALFA Bratislava, 1976
Veis Š., Martišovits V., Maďar J.: Mechanika a molekulová fyzika,
ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1978
Štrba A.: Optika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1979
Čičmanec P.: Elektrina a magnetizmus, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1980
Hajko V., Daniel-Szabó J.: Základy fyziky, VEDA, Bratislava 1980
Krempaský J.: Fyzika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1982
Čulík F., Noga M.: Úvod do statist. fyziky a termodynamiky, ALFA, Bratislava 1982
Kvasnica J.: Teorie elektromagnetického pole, Academia, Praha 1985

Friš S. E., Timoreva A.V.: Kurs obšej fiziki I, II, III, GITTL, Moskva 1951
The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley Publ. Comp. London 1964
Javorskij B. M., Detlaf A. A.: Príručka fyziky, SVTL, Bratislava 1965
Beiser A.: Úvod do moderní fyziky, Academia, Praha 1975
Saveljev I.V.: Kurs obščeij fiziki I, II, Nauka, Moskva 1977, 1988
Dobrinski -Krakau -Vogel: Physik fuer Ingenieure, Teubner Verl., Stuttgart 1993
Halliday D., Resnick R.: Fundamentals of Physics, John Wiley, New York 1986

Zbierky príkladov

- Sacharov D. I., Kosminkov I.S.: Sbornik zadač po fizike, Učpedgiz, Moskva 1952
Hajko V. a kol.: Fyzika v príkladoch, 4. vydanie, ALFA, Bratislava 1971
Lindner H.: Riešené úlohy z fyziky, ALFA, Bratislava 1973
Saveljev I. V.: Sbornik voprosov i zadač po obščeij fizike, Nauka, Moskva 1982
Krempaský a kol.: Fyzika - Příklady a úlohy, STU, Bratislava 1989, 2000

Iné zdroje

- Garaj a kol.: Fyzikálna terminológia, SPN Bratislava, 1987
Tilich J. a kol.: Slovník školské fyziky, SPN Praha, 1988
Mechlová E., Košťál K.: Výkladový slovník fyziky, Prometheus Praha 1999
Norma STN ISO 31 – Veličiny a jednotky, SÚTN Bratislava, 1997

Ivan Červeň: Fyzika po kapitolách, časť 1.
Vektory

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave
vo vydavateľstve STU SPEKTRUM v roku 2020

ISBN 123456789