Posledná aktualizácia: 15. mája 2012. Čo bolo aktualizované (oproti predošlej verzii zo 14. marca 2009): Rozsiahle zmeny, napr.: Dodané postupy riešení niektorých príkladov. Uvádzanie obtiažností príkladov. Úplne nové formátovanie. Pridané záhlavie s týmito informáciami.

Písmená **A**, **B**, **C**, **D** vyjadrujú obtiažnosť príkladu. **D** je najnižšia.

6 KMITY A VLNY

PRÍKLAD 6.1 ☆☆☆★ (D)

Amplitúda lineárneho harmonického oscilátora je $y_{\max} = 12\,\mathrm{cm}$ a jeho frekvencia $f = 15\,\mathrm{Hz}$. Aká veľká je jeho výchylka v čase **a)** $t_1 = 0{,}01\,\mathrm{s}$, **b)** $t_2 = 0{,}02\,\mathrm{s}$, **c)** $t_3 = 0{,}03\,\mathrm{s}$, keď v čase $t = 0$ bola nulová.

[**a)** $y_1 = 9{,}7\,\mathrm{cm}$; **b)** $y_2 = 11{,}41\,\mathrm{cm}$; **c)** $y_3 = 3{,}7\,\mathrm{cm}$]

PRÍKLAD 6.2 ☆☆☆★ (D)

Aké frekvencie majú harmonické oscilátory s amplitúdou $y_0 = 10\,\mathrm{cm}$, pri ktorých sa za čas $t = 0{,}001\,\mathrm{s}$ po prechode rovnovážnou polohou dosiahnu výchylky:
a) $y_1 = 2\,\mathrm{cm}$, **b)** $y_2 = 5\,\mathrm{cm}$, **c)** $y_3 = 9\,\mathrm{cm}$.

[**a)** $f_1 = 32{,}04\,\mathrm{Hz}$; **b)** $f_2 = 83{,}33\,\mathrm{Hz}$; **c)** $f_3 = 178{,}22\,\mathrm{Hz}$]

PRÍKLAD 6.3 ☆☆☆★ (D)

Za aký veľký časový interval po prechode rovnovážnou polohou dosiahne harmonický oscilátor s amplitúdou $y_0 = 2\,\mathrm{cm}$ a frekvenciou $50\,\mathrm{Hz}$ výchylky:
a) $y_1 = 1\,\mathrm{mm}$, **b)** $y_2 = 5\,\mathrm{mm}$, **c)** $y_3 = 1{,}5\,\mathrm{cm}$.

$$\left[\; t = \frac{1}{2\pi f}\,\arcsin\frac{y}{y_0}; \quad \mathbf{a)}\ t_1 = 159\,\mu\mathrm{s}; \quad \mathbf{b)}\ t_2 = 804{,}3\,\mu\mathrm{s}; \quad \mathbf{c)}\ t_3 = 2{,}7\,\mathrm{ms} \;\right]$$

PRÍKLAD 6.4 ☆☆★★ (C)

Výchylka harmonického oscilátora dosiahne za $1/20\,\mathrm{s}$ (po prechode rovnovážnou polohou) $1/4$ maximálnej výchylky. Aká je frekvencia[1] ν a uhlová frekvencia ω?

[$\nu = 0{,}8043\,\mathrm{Hz}$; $\omega = 5{,}05\,\mathrm{s}^{-1}$]

[1] Znak ν je grécke písmeno, ktoré čítame ní. Dosť často sa používa na označovanie frekvencií. Nezamieňať so znakom v.

PRÍKLAD 6.5 ☆☆★★ (C)

Harmonicky kmitajúci bod je za $t_1 = 0{,}2\,\mathrm{s}$ po prechode rovnovážnou polohou vzdialený $y_1 = 4{,}5\,\mathrm{cm}$ od tejto polohy. Aká veľká je frekvencia ν a doba kmitu T, keď amplitúda $y_0 = 6\,\mathrm{cm}$? Za aký časový interval Δt po prechode rovnovážnou polohou sa dosiahne výchylka hodnotu $y = 4{,}5\,\mathrm{cm}$ po druhý raz?

[$\nu = 0{,}6749\,\mathrm{Hz}$; $T = 1{,}482\,\mathrm{s}$; $\Delta t = 0{,}541\,\mathrm{s}$]

PRÍKLAD 6.6 ☆★★★ (B)

Výchylka y_1 harmonického oscilátora s periódou $T = 15\,\mathrm{s}$ a amplitúdou $y_0 = 10\,\mathrm{cm}$ sa zdvojnásobnila za $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$. Aká veľká je táto výchylka?

[$y_1 = 3{,}506\,\mathrm{cm}$]

PRÍKLAD 6.7 ☆☆★★ (C)

Koľko času uplynie kým výchylka harmonického oscilátora s frekvenciou $\nu = 54\,\mathrm{Hz}$ a amplitúdou $y_0 = 8\,\mathrm{cm}$ sa zväčší z $y_1 = 3\,\mathrm{cm}$ na $y_2 = 7\,\mathrm{cm}$?

[$\Delta t = 2{,}007\,\mathrm{ms}$]

PRÍKLAD 6.8 ☆★★★ (B)

Výchylka harmonického oscilátora s amplitúdou $A = 6\,\mathrm{cm}$ dosiahne v prvej polperióde meranej od prechodu rovnovážnou polohou v časovom rozpätí $\Delta t = 0{,}001\,\mathrm{s}$ dva razy za sebou tú istú hodnotu $y_1 = 2{,}5\,\mathrm{cm}$. Akú má oscilátor frekvenciu f?

$$\left[\ f = \frac{1}{2\pi\Delta t}\left(\pi - 2\arcsin\frac{y_1}{A}\right) = 363{,}2\,\mathrm{Hz}\ \right]$$

PRÍKLAD 6.9 ☆☆★★ (C)

Dva harmonické oscilátory s rovnakou amplitúdou A a s frekvenciou $f_1 = 50\,\mathrm{Hz}$ a $f_2 = 60\,\mathrm{Hz}$ začnú z rovnovážnej polohy kmitať súčasne. Za aký časový interval Δt budú výchylky po prvý raz rovnako veľké?

[$\Delta t = 1/220\,\mathrm{s}$]

PRÍKLAD 6.10

☆☆☆★ (D)

Napíšte rovnicu[2] pre výchylku harmonického oscilátora s amplitúdou $y_0 = 5\,\text{cm}$ ak počas časového intervalu $\Delta t = 1$ min sa uskutoční $N = 150$ kmitov a začiatočná fáza je $\varphi = 45°$.

[$y = 5\sin(5\pi\{t\} + \pi/4)\,\text{cm}$, kde za častreba dosadzovať v sekundách.]

PRÍKLAD 6.11

☆☆☆★ (D)

Silová konštanta pružiny je $k = 24{,}525\,\text{N/m}$. Akú hmotnosť musí mať teleso zavesené na pružine, aby účinkom tiaže kmitalo s frekvenciou $f = 25$ kmitov za minútu?

$$\left[\, m = \frac{K}{4\pi^2 f^2} = 3{,}6\,\text{kg} \,\right]$$

PRÍKLAD 6.12

☆☆★★ (C)

Silová konštanta pružiny je $k = 29{,}43$ N/m. Aká je hmotnosť zaveseného telesa, ktoré kmitá s amplitúdou $A = 5\,\text{cm}$ a cez rovnovážnu polohu prechádza rýchlosťou $v = 80\,\text{cm/s}$?

$$\left[\, m = \frac{A^2 k}{v_\text{m}^2} = 0{,}115\,\text{kg} \,\right]$$

PRÍKLAD 6.13

☆☆★★ (C)

Keď zväčšíme hmotnosť telesa visiaceho na pružine o hmotnosť $\Delta m = 60\,\text{g}$, doba kmitu sa zdvojnásobní. Aká bola pôvodná hmotnosť telesa m_0?

$$\left[\, m_0 = \frac{\Delta m}{3} = 20\,\text{g} \,\right]$$

PRÍKLAD 6.14

☆★★★ (B)

Karoséria nákladného auta s hmotnosťou $m_0 = 800\,\text{kg}$ poklesne po naložení bremena o hmotnosti $m_1 = 1{,}8\,.\,10^3\,\text{kg}$ o $s = 6\,\text{cm}$.

a) Aká z toho vyplýva doba kmitu karosérie auta T?

b) Akú dobu kmitu T_0 má prázdna karoséria?

c) Aké bremeno treba naložiť, aby sa doba kmitu voči prípadu b) zdvojnásobnila?

$$\left[\, \textbf{a)}\ T = 2\pi\sqrt{\frac{(m_0 + m_1)s}{m_1 g}} = 0{,}5906\,\text{s};\quad \textbf{b)}\ T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m_0 s}{m_1 g}} = 0{,}33\,\text{s};\quad \textbf{c)}\ m_2 = 3m_0 = 2\,400\,\text{kg} \,\right]$$

---

[2] Zápis $\{t\}$ použitý vo výsledku znamená, že z veličiny t je zobraná len jej číselná hodnota. Potrebujeme totiž, aby argumentom funkcie sínus bolo číslo bez jednotiek, t.j. bezrozmerná hodnota. Pre stručnosť zápisu však toto zátvorkovanie býva často vynechávané.

PRÍKLAD 6.15 ☆☆★★ (C)

Celková energia telesa konajúceho harmonický pohyb je $E = 3\,.\,10^{-5}\,\mathrm{J}$. Maximálna sila pôsobiaca na teleso $F_{\max} = 1{,}5\,.\,10^{-3}\,\mathrm{N}$. Napíšte rovnicu pre výchylku tohto telesa, ak perióda jeho kmitov je $T = 2\,\mathrm{s}$ a začiatočná fáza $\phi = 60^\circ$.

$$\left[\ y = \frac{2E}{F_{\max}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right) = 0{,}04\,\mathrm{m}\,\sin\left(\pi\{t\} + \frac{\pi}{3}\right),\quad \text{kde za } t \text{ je dosadzované v sekundách.}\ \right]$$

PRÍKLAD 6.16 ☆☆★★ (C)

Pri natiahnutí pružiny o $s = 8$ cm sa vykoná práca $W = 1{,}96\,.10^{-3}$ J. Akú periódu T budú mať kmity, keď na pružinu zavesíme teleso o hmotnosti $m = 50\,\mathrm{g}$?

$$\left[\ T = 2\pi\sqrt{\frac{ms^2}{2W}} = 1{,}795\,\mathrm{s}\ \right]$$

PRÍKLAD 6.17 ☆☆★★ (C)

Teleso o hmotnosti m zavesené na pružine koná za minútu $N = 42$ kmitov. Aké predĺženie pružiny $\Delta\ell$ spôsobí toto teleso v rovnovážnej polohe?

$$\left[\ \Delta\ell = \frac{g}{4\pi^2 f^2} = \frac{g}{4\pi^2}\left(\frac{60}{N}\right)^2 = 0{,}507\,\mathrm{m}\ \right]$$

PRÍKLAD 6.18 ☆☆★★ (C)

Hmotný bod s hmotnosťou $m = 10\,\mathrm{g}$ koná harmonický pohyb podľa vzťahu

$$x = A\sin(\omega t + \pi/4)$$

kde $A = 5\,\mathrm{cm}$, $\omega = \pi\,\mathrm{rad/s}$. Nájdite maximálnu silu, ktorá pôsobí na bod a celkovú energiu kmitajúceho bodu.

$$\left[\ F_{\max} = mA\omega^2 = 4{,}93\,.\,10^{-3}\,\mathrm{N};\quad E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = 1{,}23\,.\,10^{-4}\,\mathrm{J}\ \right]$$

PRÍKLAD 6.19 ☆☆★★ (C)

Určte podiel kinetickej a potenciálnej energie hmotného bodu konajúceho harmonický pohyb v týchto časových okamihoch: **a)** $t_1 = T/12$, **b)** $t_2 = T/8$, **c)** $t_3 = T/6$.

[**a)** 3; **b)** 1; **c)** 1/3]

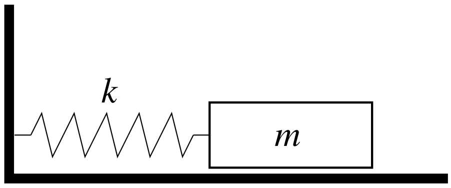
PRÍKLAD 6.20 ☆★★★ (B)

Teleso s hmotnosťou m = 0,5 kg je pripevnené na pružinu, ktorej silová konštanta k = 0,8 N/m (obrázok). Teleso vykonáva harmonický pohyb s amplitúdou A = 10 cm. Vypočítajte:

a) maximálnu hodnotu rýchlosti a zrýchlenia,

b) rýchlosť a zrýchlenie, keď teleso je od rovnovážnej polohy vzdialené $x_1 = 5\,\mathrm{cm}$,

c) čas, za ktorý prejde teleso z rovnovážnej polohy do polohy kedy $x = 5\,\mathrm{cm}$.



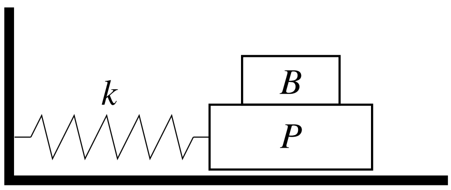
[
a) $v_{\max} = A\sqrt{\dfrac{k}{m}} = 0{,}126\,\mathrm{m/s}$; $a_{\max} = A\dfrac{k}{m} = 0{,}16\,\mathrm{m/s^2}$

b) $v(x_1) = A\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cos\dfrac{\pi}{6} = 0{,}10954\,\mathrm{m/s}$; $a(x_1) = A\dfrac{k}{m}\sin\dfrac{\pi}{6} = 0{,}08\,\mathrm{m/s^2}$

c) $t_5 = \sqrt{\dfrac{m}{k}}\arcsin\dfrac{x}{A} = 0{,}414\,\mathrm{s}$
]

PRÍKLAD 6.21 ☆★★★ (B)

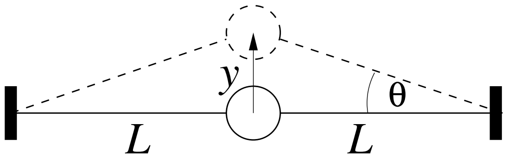
Veľký blok P vykonáva harmonický pohyb kĺžúc sa bez trenia po vodorovnej ploche s frekvenciou $f = 1{,}5\,\mathrm{Hz}$. Blok B leží na bloku P (pozri obrázok). Koeficient statického trenia medzi blokmi P a B je $\mu = 0{,}6$. Aká maximálna amplitúda kmitov bloku P je prípustná, aby sa blok B nezačal voči bloku P kĺzať?



$$\left[\ A_c = \frac{\mu g}{4\pi^2 f^2} = 6{,}62\,\mathrm{cm}\ \right]$$

PRÍKLAD 6.22 ☆★★★ (B)

Teleso o hmotnosti m je pripojené na dve gumené lanká dĺžky L , pričom každé je napínané silou T (pozri obrázok), Teleso vychýlime vertikálne o malú vzdialenosť y. Za predpokladu, že napätia sa nemenia a zanedbáme tiažovú silu ukážte, že systém vykonáva harmonické kmity a vypočítajte uhlovú frekvenciu ω.



$$\left[\omega = \sqrt{\frac{2T}{mL}} \right]$$

PRÍKLAD 6.23 ☆★★★ (B)

Kyvadlo vykoná $N = 20$ malých tlmených kmitov. Počas posledných $N/2 = 10$ kmitov klesne amplitúda z $y_{01} = 8\,\text{cm}$ na $y_{02} = 3\,\text{cm}$. Aká bola začiatočná amplitúda y_0?

$$\left[y_0 = \frac{y_{01}^2}{y_{02}} = 21{,}\bar{3}\,\text{cm}, \ \forall \text{ párne } N \right]$$

PRÍKLAD 6.24 ☆★★★ (B)

Amplitúdy prvého a tretieho kmitu jazýčka analytických váh ukazujú $\phi_1 = 10{,}5$ resp. $\phi_3 = 9{,}9$ dielikov na stupnici váh. Aká veľká je amplitúda ôsmeho $(n = 8)$ kmitu?

[8,545 dielikov]

PRÍKLAD 6.25 ☆★★★ (B)

Nájdite amplitúdu a začiatočnú fázu harmonického kmitania, ktoré vzniklo zložením dvoch rovnobežných harmonických kmitov, ktorých výchylky sú: $x_1 = 4 \sin(\pi t)\,\text{cm}$ a $x_2 = 3 \sin(\pi t + \pi/2)\,\text{cm}$. Napíšte rovnicu pre výchylku výsledných kmitov.

[$x = 5 \sin(\pi t + 0{,}2\pi)\,\text{cm}$]

PRÍKLAD 6.26 ☆★★★ (B)

Napíšte rovnicu výchylky výsledného kmitavého pohybu, ktorý vznikne skladaním dvoch navzájom kolmých harmonických kmitavých pohybov s frekvenciou $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 5\,\text{Hz}$, rovnakou počiatočnou fázou $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi = 60°$ a s amplitúdami $A_1 = 0{,}1\,\text{m}$, $A_2 = 0{,}05\,\text{m}$.

[Bod sa pohybuje po úsečke. $y(x) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\,\sin(2\pi\nu t + \varphi) = 0{,}1118\,\text{m}\,\sin(10\pi\{t\} + \pi/3)$]

PRÍKLAD 6.27 ☆☆★★ (C)

Hmotný bod vykonáva kmitavý pohyb, ktorý je superpozíciou dvoch harmonických pohybov s rovnakými periódami a s rovnakými počiatočnými fázami. Ich amplitúdy sú: $A_1 = 3\,\mathrm{cm}$, $A_2 = 4\,\mathrm{cm}$. Nájdite amplitúdu výsledného pohybu ak skladajúce kmity sú
a) vzájomne rovnobežné,
b) na seba kolmé.

$$\left[\ \textbf{a)}\ A = A_1 + A_2 = 7\,\mathrm{cm};\quad \textbf{b)}\ A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 5\,\mathrm{cm}\ \right]$$

PRÍKLAD 6.28 ☆★★★ (B)

Amplitúda kmitov tlmeného harmonického oscilátora poklesla po desiatich kmitoch na polovicu pôvodnej. Po koľkých kmitoch poklesne jeho celková energia na jednu štvrtinu pôvodnej hodnoty?

[Po 10-tich kmitoch.]

PRÍKLAD 6.29 ☆☆★★ (C)

Aká je amplitúda, perióda, fázová rýchlosť a vlnová dĺžka vlny, ktorá je vyjadrená rovnicou $y = 0{,}3\,\sin[2\pi(4t + x)]$? y je výchylka v metroch, t čas v sekundách a x je súradnica v metroch.

$$[\ y_0 = 0{,}3\,\mathrm{m};\quad T = 0{,}25\,\mathrm{s};\quad v = 4\,\mathrm{m/s};\quad \lambda = 1\,\mathrm{m}\ ]$$

PRÍKLAD 6.30 ☆☆☆★ (D)

Akú frekvenciu má rovinná harmonická vlna, ktorá potrebuje $\Delta t = 12\,\mathrm{s}$ na prekonanie dráhy rovnej n-násobku ($n = 7{,}5$) vlnovej dĺžky?

$$\left[\ f = \frac{n}{\Delta t} = 0{,}625\,\mathrm{Hz}\ \right]$$

PRÍKLAD 6.31 ☆☆☆★ (D)

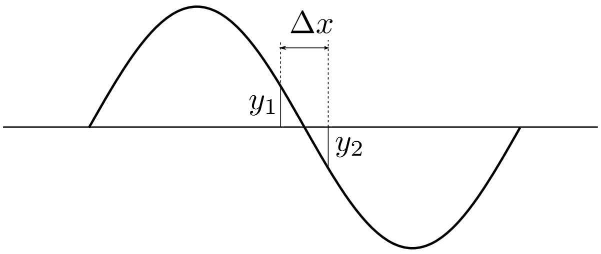
Koľko vlnových dĺžok predstavuje dráha, ktorú prebehne vlna za časový interval $\Delta t = 25\,\mathrm{s}$, keď rýchlosť šírenia vlny $c = 40\,\mathrm{cm/s}$ a vlnová dĺžka $\lambda = 10\,\mathrm{cm}$?

$$\left[\ N = \frac{ct}{\lambda} = 100\ \right]$$

PRÍKLAD 6.32

☆★★★ (B)

Aká je vlnová dĺžka λ harmonickej vlny, keď rovnako veľké, za sebou vo vzdialenosti $\Delta x = 6{,}8\,\mathrm{m}$ nasledujúce výchylky majú veľkosť rovnú 1/3 amplitúdy? Fázová rýchlosť vlnenia je $c = 340\,\mathrm{m/s}$. Úlohu riešte aj všeobecnejšie pre prípad, keď 1/3 nahradíte hodnotou $1/n$.



$$\left[\ \lambda = \frac{\pi\Delta x}{\arcsin\frac{1}{n}};\quad \text{pre } n = 3 \text{ bude } \lambda = \frac{\pi\Delta x}{\arcsin\frac{1}{3}} = 62{,}86\,\mathrm{m}\ \right]$$

PRÍKLAD 6.33

☆☆☆★ (D)

Rovinná vlna má amplitúdu $y_0 = 20\,\mathrm{cm}$, rýchlosť $v = 40\,\mathrm{cm/s}$ a frekvenciu $f = 10\,\mathrm{Hz}$. Vo vzdialenosti $x = 12\,\mathrm{cm}$ od východiskového bodu ($x = 0$) má výchylku $y = 15\,\mathrm{cm}$. Aký čas t_1 potrebuje vlna na prebehnutie tejto dráhy?

$$\left[\ t_1 = \frac{x}{v} + \frac{1}{2\pi f}\arcsin\frac{y}{y_0} = 0{,}3135\,\mathrm{s}\ \right]$$

PRÍKLAD 6.34

☆☆★★ (C)

Vlnenie o frekvencii $f = 500\,\mathrm{Hz}$ a amplitúde $A = 0{,}25\,\mathrm{mm}$ sa šíri vo vzduchu. Jeho vlnová dĺžka je $\lambda = 70\,\mathrm{cm}$. Určte

a) (fázovú) rýchlosť šírenia sa vlnenia v,

b) maximálnu rýchlosť pohybu vzduchu v_{vm}.

[**a)** $v = \lambda f = 350\,\mathrm{m/s}$; **b)** $v_{\mathrm{vm}} = 2\pi f A = 0{,}7854\,\mathrm{m/s}$]

PRÍKLAD 6.35

☆☆★★ (C)

Keď skrátime strunu o $\Delta\ell = 10\,\mathrm{cm}$, zvýši sa jej základná frekvencia 1,5-krát. Vypočítajte pôvodnú dĺžku struny, keď v oboch prípadoch je sila napínajúca strunu rovnaká.

$$\left[\ \ell = \frac{n}{n-1}\Delta\ell;\quad \text{pre } n = 1{,}5 \text{ a } \Delta\ell = 10\,\mathrm{cm} \text{ dostávame } \ell = 0{,}3\,\mathrm{m}\ \right]$$

PRÍKLAD 6.36 ☆☆★★ (C)

Akou silou F musí byť napnutá oceľová struna (hustota $\rho = 7{,}8\,\mathrm{g/cm^3}$, dĺžka $\ell = 1{,}5\,\mathrm{m}$ a prierez $S = 1\,\mathrm{mm^2}$), aby zaznel tón s frekvenciou $f = 440\,\mathrm{Hz}$?

$\left[\ F = (2\ell f)^2 \rho S = 13\,590{,}7\,\mathrm{N}\ \right]$

PRÍKLAD 6.37 ☆★★★ (B)

Píšťala lokomotívy vydáva tón o frekvencii $f_0 = 400\,\mathrm{Hz}$. Keď sa lokomotíva blíži k skalnej stene s tunelom, strojvodca zapne píšťalu. S akou frekvenciou počuje strojvodca signál odrazený od skalnej steny, keď rýchlosť lokomotívy $v_{\mathrm{L}} = 50\,\mathrm{km/h}$ a rýchlosť zvuku $v_{\mathrm{z}} = 340\,\mathrm{m/s}$?

$$\left[\ f = \frac{v_{\mathrm{z}} + v_{\mathrm{L}}}{v_{\mathrm{z}} - v_{\mathrm{L}}} f_0 = 434{,}1\,\mathrm{Hz}\ \right]$$

PRÍKLAD 6.38 ☆☆★★ (C)

V spektre hviezdy sa zistila čiara sodíka D_1 s vlnovou dĺžkou $\lambda = 592{,}0\,\mathrm{nm}$. Akou rýchlosťou v sa hviezda vzďaľuje od Zeme, keď meranie sodíkovej vzorky umiestnenej v pozemskom laboratóriu dáva hodnotu $\lambda_0 = 589{,}6\,\mathrm{nm}$? Predpokladajte, že $v \ll c$, kde $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$ je rýchlosť svetla, a že teda možno použiť nerelativistický vzťah pre Dopplerov efekt.

$[\ v = 1\,220{,}3\,\mathrm{km/s}\ ]$