

3 Prenos hmoty a energie

3.1 Stacionárny prípad

1. Prúd vody v rieke s prietokom $Q_s = 10\text{m}^3/\text{s}$ má koncentráciu chloridov $c_s = 20\text{mg/l}$. Prítok rieky s prietokom $Q_w = 5\text{m}^3/\text{s}$ má koncentráciu chloridov $c_w = 40\text{mg/l}$. Aká je výsledná koncentrácia chloridov po dokonalom premiešaní.

Riešenie

Ak predpokladáme dokonalé premiešanie a ustálený stav, potom prísun chloridov do rieky musí byť v rovnováhe s ich odsunom (odtokom). Všeobecne, pri prietoku $Q\text{m}^3/\text{s}$ a koncentrácii polutantu $c\text{ mg/l}$ bude prísun polutantu $Qc \times 1000\text{ mg/s}$ (faktor 1000 zohľadňuje tú skutočnosť, že $1\text{m}^3 = 1000\text{ litrov}$). Celkový prísun chloridov do rieky potom bude:

$$Vstup = (Q_s c_s + Q_w c_w) \times 1000\text{mg/s}$$

Po zmiešaní rieky a prítoku musí v rovnovážnom stave platiť pre výstupnú koncentráciu, c_m :

$$Vstup = (Q_s c_s + Q_w c_w) \times 1000\text{mg/s} = Q_m c_m \times 1000\text{mg/s} = Výstup$$

pričom

$$Q_m = (Q_s + Q_w)$$

Pre hľadajú koncentráciu, c_m dostaneme:

$$c_m = \frac{(Q_s c_s + Q_w c_w) \times 1000\text{mg/s}}{(Q_s + Q_w) \times 1000\text{l/s}} = 26.7\text{ mg/l}$$

Komentár

- Všimnite si, že faktor 1000 (prevod m^3 na litre) sa vo výslednom vzťahu vykrátí, čo prakticky zodpovedá zmene jednotky prietoku. Keby sme všetky prietoky jednotne vyjadrili v inej jednotke (napríklad l/s), museli by sme dostať ten istý výsledok.

2. Priemerný prietok Dunaja v Bratislave je $2000 \text{ m}^3/\text{s}$. Uvažujme, že sa do Dunaja v Bratislave vypúšťa odpadová voda s prítokom $20 \text{ m}^3/\text{s}$ a s koncentráciou polutantov 100 mg/liter . V Gapčíkove sa vypúšťa odpadová voda s prítokom $15 \text{ m}^3/\text{s}$ a s koncentráciou polutantov 50 mg/liter . Vypočítajte koncentráciu polutantov:
- za Bratislavou
 - za Gapčíkovom

Riešenie

Situácia v Bratislave je nasledovná. Prísun polutantov s prítokom $20 \text{ m}^3/\text{s}$ a s koncentráciou polutantov 100 mg/liter znamená v absolútnom množstve $20000 \text{ litrov/s} \times 100 \text{ mg/liter} = 2 \times 10^6 \text{ mg}$ polutantov za sekundu. Po premiešaní s prítokom bude odtok $2020 \text{ m}^3/\text{s}$ a pre koncentráciu polutantu bude platiť:

$$Q_{in}c_{in} = Q_{out}c_{out}$$

$$c_{out} = \frac{Q_{in}c_{in}}{Q_{out}} = \frac{20000 \times 100}{2020000} = \frac{20 \times 100}{2020} = 0.99 \text{ mg/l}$$

Do Gapčíkova teda priteká už znečistený Dunaj s prítokom $2020 \text{ m}^3/\text{s}$ a koncentráciou polutantov 0.99 mg/l . K tomu sa pridáva odpad v Gapčíkove s prítokom $15 \text{ m}^3/\text{s}$ a s koncentráciou polutantov 50 mg/liter . Po dokonalom premiešaní bude platiť:

$$c_m = \frac{Q_{BA}c_{BA} + Q_{GAP}c_{GAP}}{Q_{BA} + Q_{GAP}} = \frac{2000 + 750}{2035} = 1.351 \text{ mg/l}$$

V praxi je výsledná koncentrácia polutantov limitovaná príslušnými normami a predpismi, a treba vypočítať vstupné parametre. Napríklad:

3. Do čistej rieky s prietokom $500 \text{ m}^3/\text{s}$ ústi odpad s prietokom $10 \text{ m}^3/\text{s}$. Aká môže byť najvyššia koncentrácia polutantov v odpade, aby výsledné znečistenie rieky bolo menšie ako 1 ppm ? Výsledok vyjadrite v jednotkách $[\text{ppm}]$ a $[\text{mg/l}]$.

Riešenie

V ustálenom stave platí:

$$Q_{waste}c_{waste} = (Q_{waste} + Q_{river})c_{out}$$

$$c_{waste} = \frac{(Q_{waste} + Q_{river})c_{out}}{Q_{waste}} = \frac{510 \times 1}{10} = 51 \text{ ppm}$$

V prípade vody s hustotou 1kg/l je prevod [ppm] na [mg/l] triviálny, nakoľko 1mg/l = 1mg/kg = 1ppm. Koncentrácia polutantov v odpade teda nesmie prekročiť 51mg/l.

- 4. Ako treba regulovať koncentráciu polutantov v odpade v prípade, že v období sucha klesne prietok rieky na 200m³/s?**

Riešenie

Použijeme výsledok z predchádzajúceho príkladu:

$$c_{waste} = \frac{(Q_{waste} + Q_{river})c_{out}}{Q_{waste}} = \frac{210 \times 1}{10} = 21 \text{ ppm}$$

Ak prietok rieky v období sucha klesne na 200m³/s, koncentráciu polutantov v odpade treba znížiť na 21ppm.

- 5. Alternatívne, koľko odpadovej vody môžeme vypúšťať v období sucha, ak nie je možné znížiť koncentráciu polutantov v odpade?**

Riešenie

Vychádzame opäť zo vzťahu:

$$Q_{waste}c_{waste} = (Q_{waste} + Q_{river})c_{out}$$

V tomto prípade však hľadanou veličinou bude množstvo (t.j. prietok) vody vypúšťanej z odpadu do rieky, Q_{waste} .

$$Q_{waste}c_{waste} = (Q_{waste} + Q_{river})c_{out} = Q_{waste}c_{out} + Q_{river}c_{out}$$

$$Q_{waste}c_{waste} - Q_{waste}c_{out} = Q_{river}c_{out}$$

$$Q_{waste} = \frac{Q_{river}c_{out}}{c_{waste} - c_{out}} = \frac{200 \times 1}{51 - 1} = 4 \text{ m}^3/\text{s}$$

Komentár

- Ak teda v období sucha klesne prietok v rieke z $500 \text{ m}^3/\text{s}$ na $200 \text{ m}^3/\text{s}$ (t.j. 2.5 krát), musíme úmerne tomu znížiť aj prietok vody v odpade z $10 \text{ m}^3/\text{s}$ na $4 \text{ m}^3/\text{s}$, t.j. tiež 2.5 krát. Vidieť to zo vzťahu:

$$Q_{waste} = \frac{Q_{river}c_{out}}{c_{waste} - c_{out}} = Q_{river} \frac{c_{out}}{c_{waste} - c_{out}}$$

$$\frac{Q_{waste}}{Q_{river}} = \frac{c_{out}}{c_{waste} - c_{out}}$$

Pomer prietokov Q_{waste} / Q_{river} je daný pomerom koncentrácií polutantov $\frac{c_{out}}{c_{waste} - c_{out}}$. Pri rovnakých hodnotách koncentrácií musí byť zachovaný pomer prietokov Q_{waste} / Q_{river} . V tomto konkrétnom prípade môže byť maximálny prietok vody v odpade vždy 1/50 prietoku vody v rieke.

6. Do rieky s obsahom soli 400ppm a prietokom $25 \text{ m}^3/\text{s}$ priteká potok s prietokom $5 \text{ m}^3/\text{s}$ a obsahom soli 2000mg/l. Časť vody z rieky sa odoberá, mieša s čistou vodou bez soli a používa sa ako úžitková voda, ktorá nesmie mať obsah soli viac ako 500ppm. Aký musí byť pomer prietokov čistej vody a vody odoberanej z rieky?

Riešenie

Najprv musíme zjednotiť jednotky koncentrácie pre riek a potok. V prípade vody platí, že $1 \text{ ppm} = 1 \text{ mg}/1 \text{ kg}$. 1kg vody má objem 1 liter, takže $1 \text{ ppm} = 1 \text{ mg}/\text{l}$. 400ppm teda predstavuje 400mg/l. To sa mieša s vodou z potoka a platí:

$$Q_{rieka}c_{rieka} + Q_{potok}c_{potok} = (Q_{rieka} + Q_{potok})c_{out}$$

Po sútoku rieky a potoka bude koncentrácia soli v rieke:

$$\frac{Q_{rieka}c_{rieka} + Q_{potok}c_{potok}}{Q_{rieka} + Q_{potok}} = c_{out}$$

Z tejto vody sa odoberá prietok Q_1 a mieša sa s čistou vodou s prietokom Q_2 , pričom výsledná koncentrácia nesmie prekročiť $500\text{ppm} = 500\text{mg/l}$. Musí teda platiť:

$$Q_1c_{out} = (Q_1 + Q_2)c_{limit} \Rightarrow c_{out} = \left(1 + \frac{Q_2}{Q_1}\right)c_{limit}$$

$$\frac{c_{out}}{c_{limit}} - 1 = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\frac{Q_{rieka}c_{rieka} + Q_{potok}c_{potok}}{Q_{rieka} + Q_{potok}}}{c_{limit}} - 1$$

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme (pre obrátený pomer Q_1 / Q_2) hodnotu 3. Vodu z rieky treba teda riediť čistou vodou v pomere **3:1**, aby ju bolo možné využívať ako úžitkovú vodu.

- 7. Jazerom s objemom 10^7m^3 preteká prúd vody z potoka s prietokom $5\text{m}^3/\text{s}$ a koncentráciou nečistôt 10mg/l . Továrň vypúšťa do jazera odpad s prietokom $0.5\text{m}^3/\text{s}$ a koncentráciou nečistôt 100mg/l . Reakčný koeficient je $0.2/\text{deň}$. Vypočítajte ustálenú koncentráciu nečistôt.**

Riešenie

V ustálenom stave ($dc/dt = 0$) musí platiť:

$$0 = V_{stup} - V_{ýstup} - \text{Rozpad}$$

Analyzujme jednotlivé členy (treba byť pozorný najmä čo sa týka jednotiek).

Vstup znečisťujúcich látok do jazera je daný súčtom príspevkov z potoka a z odpadu z továrne $Q_{potok}c_{potok} + Q_{továrň}c_{továrň}$. Všetky členy musia byť v rovnakých jednotkách;

zvoľme napríklad mg/s. Prietoky sú udané v m³/s, koncentrácie v mg/l. Každý m³ predstavuje 1000 litrov. Prísun polutantov preto bude:

$$Q_{potok}c_{potok} + Q_{továreň}c_{továreň} = 5000 \times 10 + 500 \times 100 = 100 \times 10^3 \text{ mg/s}$$

V jazere sa vytvorí hľadaná rovnovážna koncentrácia, c , takže voda vytekajúca z jazera bude znamenať výstup polutantov na úrovni $(Q_{potok} + Q_{továreň})c = 5500c$ [mg/s].

V jazere sa teda vždy nachádza celkové množstvo polutantov $Vc = 10^{10}c$ [mg]. Reakčný koeficient je však zadán ako 0.2 „za deň“. Aby sme zachovali rovnaké jednotky, musíme rozpad tiež vyjadriť v [mg/s]. Reakčný koeficient preto bude $0.2/24/3600$ „za sekundu“. Ubúdanie polutantov v dôsledku rozpadu preto bude $KVc = \frac{0.2 \times 10^{10}}{24 \times 3600}c = 23148.15c$ [mg/s].

Úbytok polutantov spolu v dôsledku odtoku aj rozpadu potom bude:

$$(Q_{potok} + Q_{továreň})c + KVc = (Q_{potok} + Q_{továreň} + KV)c = (5500 + 23148.15)c$$

Po sčítaní dostaneme $28648.15c$ [mg/s].

V rovnovážnom stave musí byť táto hodnota v rovnováhe s prísunom polutantov, z čoho vypočítame hľadanú rovnovážnu koncentráciu, c :

$$Vstup = 100 \times 10^3 \text{ mg/s} = Výstup = 28648.15c$$

$$c = \frac{100 \times 10^3}{28648.15} = 3.49 \text{ mg/l}$$

8. Riešte vyššie uvedený príklad všeobecne a vo výslednom vzťahu urobte rozmerovú analýzu.

Riešenie

V ustálenom stave ($dc/dt = 0$) musí platiť:

$$0 = Vstup - Výstup - Rozpad$$

$$Vstup = Výstup + Rozpad$$

$$\begin{aligned} Q_{potok}c_{potok} + Q_{továreň}c_{továreň} &= (Q_{potok} + Q_{továreň})c + KVC = \\ &= (Q_{potok} + Q_{továreň} + KV)c \\ c &= \frac{Q_{potok}c_{potok} + Q_{továreň}c_{továreň}}{(Q_{potok} + Q_{továreň} + KV)} = 3.49 \text{ mg/l} \end{aligned}$$

Ako vidieť z tohto vzťahu, m³ na litre prevádzať nemusíme, nakoľko rovnaký faktor 1000 l/m³ sa objaví aj v čitateli aj v menovateli. Môžeme teda všetky objemy dosadzovať priamo v m³. Reakčný koeficient, K, však musíme vždy premeniť z 0.2/deň na 0.2/24/3600/s.

9. Aká bude rovnovážna koncentrácia polutantov v jazere, ak:

- a) Továreň zníži prietok v odpade na polovicu;
- b) Továreň úplne odstavi odpad.

Riešenie

Použijeme výsledný vzťah z predchádzajúceho príkladu a dosadíme číselné hodnoty:

$$c = \frac{Q_{potok}c_{potok} + Q_{továreň}c_{továreň}}{(Q_{potok} + Q_{továreň} + KV)} = \frac{50 + 25}{\left(5 + 0.25 + \frac{0.2}{24 \times 3600} 10^7\right)} = 2.64 \text{ mg/l}$$

$$c = \frac{Q_{potok}c_{potok} + Q_{továreň}c_{továreň}}{(Q_{potok} + Q_{továreň} + KV)} = \frac{50 + 0}{\left(5 + 0 + \frac{0.2}{24 \times 3600} 10^7\right)} = 1.78 \text{ mg/l}$$

Komentár

- Prečo po odstavení odpadu z továrne sa rovnovážna koncentrácia v jazere nerovná koncentrácii polutantov v potoku?

3.2 Nestacionárny stav